

一维光晶格中超流 Fermi 气体基态性质的研究*

柏小东 刘锐涵 刘璐 唐荣安 薛具奎†

(西北师范大学物理与电子工程学院, 兰州 730070)

(2010 年 4 月 15 日收到; 2010 年 5 月 15 日收到修改稿)

研究了一维光晶格中超流 Fermi 气体基态解的性质. 在平均场理论框架下, 利用超流 Fermi 体系中原子间相互作用能与晶格势能相互平衡的条件, 得到了一维光晶格中超流 Fermi 气体在整个 BEC-BCS 跨越区的一组基态解, 给出了基态的原子数密度空间分布、总原子数和能量. 进一步对系统从 BEC 端转变到 BCS 端时的基态解性质进行了深入分析和对比. 结果表明, 一维光晶格中超流 Fermi 气体基态分布具有一些特殊的性质, 由于 Fermi 压力, 相比而言超流 Fermi 气体在 BCS 端的基态原子数密度空间分布较为扩展, 平均能量明显偏高.

关键词: 光晶格, 超流 Fermi 气体, 基态解

PACC: 0365, 0530J, 0547, 1230

1. 引 言

超流 Fermi 气体^[1, 2]的实现, 使超流 Fermi 气体在外场中基本性质的研究发展成为超冷原子领域的一个前沿课题. 特别关于光晶格中超流 Fermi 气体动力学特性的研究更是人们关注的焦点之一. 其中一个重要的原因就是, 在如此理想的周期系统中, 实验室利用费施巴赫 (Feshbach) 共振技术通过调节磁场强度可以完全对像光晶格特性 (如晶格周期和强度)、原子间相互作用等重要物理参数进行控制和调节^[3-6]. 利用这一优势, 科学家可以在光晶格中随心所欲的实现 Fermi 原子库珀对凝聚体 (BCS) 和分子 BEC 之间的可控转变^[7], 为整个 BEC-BCS 跨越区的研究提供了极大地便利. 近年来, 理论方面对光晶格中 BCS-BEC 跨越区的一些性质, 诸如布洛赫振荡^[8]、超流-绝缘相变^[9, 10]、集体激发^[11-15]等做了大量的研究. 其中文献 [16] 系统研究了在整个 BCS-BEC 跨越区超流 Fermi 气体在光晶格中的稳定性和隧穿规律, 发现当系统从分子 BEC 一侧过渡到 BCS 一侧时, 超流 Fermi 气体在光晶格中的输运性质完全不同. 然而, 目前关于这些理论问题的研究才刚起步, 特别对光晶格中超流

Fermi 气体的输运性质在分子 BEC 超流体和 BCS 超流体的差异, 还有待于进一步深入研究.

本文研究了一维光晶格中超流 Fermi 气体的基态解性质. 利用原子间相互作用能与晶格势能相互平衡条件, 得到了一组基态解, 给出了超流 Fermi 气体从分子 BEC 超流体到 BCS 超流体的基态原子数密度空间分布、能量以及能量和晶格强度的关系. 结果表明, 超流 Fermi 体系和 BEC 体系中基态原子数密度空间分布和平均能量都存在着很大的差异.

2. 模 型

将数目相等的处于两种超精细态的超流 Fermi 原子气体装载到沿 x 方向的一维光晶格中, 同时假设系统在与晶格垂直的平面上分布均匀. 如果囚禁的原子数足够多, 假定库珀对的空间尺度小于晶格尺度, 体系从分子 BEC 超流体过渡到 BCS 超流体的过程可用流体动力学模型描述^[7, 8, 11-16]. 因此, 在平均场理论框架下, 一维光晶格中超流 Fermi 气体在零温下的动力学性质可以由一维非线性薛定谔方程描述^[7, 8, 11-16]

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2}{dx^2} + V_0 E_R \sin^2 kx + C |\psi|^{2\gamma} \right] \psi, \quad (1)$$

* 国家自然科学基金 (批准号: 10774120, 10975114), 西北师范大学科技创新工程基金 (批准号: NWNNU-KJCXGC-03-47, NWNNU-KJCXGC-03-48) 资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: Xuejk@nwnu.edu.cn

其中 ψ 为凝聚体的波函数, $M = 2m$, m 为单个原子质量(无论在分子 BEC 超流体中,还是在 BCS 超流体中,库珀对的质量都为 $2m$), V_0 为一维光晶格强度, $E_R = \frac{\hbar k^2}{2M}$ 为光晶格的反冲能量, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 为激光波数, λ 为激光波长. 本文以 ^{40}K 为例,取 $\lambda = 1064$ nm. 常数 C 表征原子相互作用强度, γ 依赖于相互作用参数:在分子 BEC 一侧, $C = \frac{4\pi\hbar^2 a_m}{M}$, $\frac{2}{3} \leq \gamma \leq 1$; 在 BCS 一侧, $C = \frac{(3\pi^2)^{\frac{2}{3}} \hbar^2 \beta}{2M}$, $0 < \gamma \leq 2/3$, 其中在么正区 $\beta = 0.44$, 在深 BCS 端 $\beta = 1$. $a_m = 0.6a_s$ 是分子之间的有效散射长度, a_s 是 Fermi 原子间 s -波散射长度. 为方便分析,对方程(1)中所有的变量进行无量纲化: $\psi \sim \psi \sqrt{k^3/2\pi}$, $t \sim \sqrt{M/\hbar k^2} t$, $x \sim x/k$. 则方程(1)无量纲化以后变为

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{V_0}{2} \sin^2 x + g |\psi|^{2\gamma} \right] \psi, \quad (2)$$

其中 $g = \left(\frac{k^3}{2\pi}\right)^\gamma \frac{CM}{\hbar^2 k^2}$. 为得到系统的基态解,令 $\psi(x) = \varphi(x) \exp[-i\mu t]$, 其中 μ 是体系的化学势, 将其代入方程(2)可得

$$\varphi \mu = \left[-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{V_0}{2} \sin^2 x + g |\varphi|^{2\gamma} \right] \varphi, \quad (3)$$

在光晶格中,系统基态可由能量密度来描述. 此时,一维周期势阱中凝聚体的平均能量为

$$E = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \varphi^* \left(-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{V_0}{2} \sin^2 x + g |\varphi|^{2\gamma} \right) \varphi dx, \quad (4)$$

可见,系统的能量与光晶格强度和相互作用参数密切相关.

3. 系统的基态解

利用能量平衡条件来求解体系的基态解,即基态时晶格势能与原子间相互作用能彼此平衡^[17,18], 此时晶格势能与原子间相互作用能之和是一个常数,假定这一常数为 $\mu - 1/2$, 则得出如下条件:

$$\frac{V_0}{2} \sin^2 x + g |\varphi|^{2\gamma} = \mu - \frac{1}{2}, \quad (5)$$

$$\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + \varphi(x) = 0, \quad (6)$$

此时,体系基态解同时受限于方程(5)和方程(6).

方程(6)决定了超流 Fermi 气体的空间密度分布,而方程(5)不仅决定了超流 Fermi 气体的空间密度分布,也决定了波函数的相位. 方程(5)和方程(6)是同一个问题的两种不同描述,所以两个方程应得到相同的解,以便确定系统的基态分布.

由方程(6)可以得到

$$\varphi(x) = A \cos x + iB \sin x, \quad (7)$$

$$|\varphi(x)|^2 = \frac{A^2 + B^2}{2} + \frac{A^2 - B^2}{2} \cos(2x), \quad (8)$$

由方程(5)得

$$|\varphi|^2 = \left(\frac{\mu - \frac{1}{2}}{g} \right)^{1/\gamma} \left(1 - \frac{V_0}{2(\mu - 1/2)} \sin^2 x \right)^{1/\gamma}. \quad (9)$$

为了与解(8)式比较,假定晶格足够浅,即 $V_0 \ll 2\mu - 1$, 此时解(9)式可很好的近似为

$$|\varphi|^2 \approx \left(\frac{\mu - \frac{1}{2}}{g} \right)^{1/\gamma} \left[1 - \frac{V_0}{4\gamma(\mu - \frac{1}{2})} + \frac{V_0}{4\gamma(\mu - \frac{1}{2})} \cos(2x) \right], \quad (9a)$$

显然,当 $\gamma = 1$ 时解(9a)式对应系统的精确解.

令 $\eta = \left(\mu - \frac{1}{2}\right)/g$, (9a)式化简为

$$|\varphi|^2 = \eta^{1/\gamma} - \frac{1}{\gamma} (\eta)^{1/\gamma-1} \frac{V_0}{4g} [1 - \cos(2x)], \quad (10)$$

知道了原子数密度,可以计算出在一个晶格周期内原子数

$$N = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\varphi|^2 dx = \left[(\eta)^{1/\gamma} - \frac{1}{\gamma} (\eta)^{1/\gamma-1} \frac{V_0}{4g} \right] \pi, \quad (11)$$

则有

$$\frac{1}{\gamma} (\eta)^{1/\gamma-1} \frac{V_0}{4g} = (\eta)^{1/\gamma} - \frac{N}{\pi}, \quad (12)$$

即系统化学势由(12)式确定. 此时(10)式被化简为

$$|\varphi|^2 = \frac{N}{\pi} + \left(\eta^{1/\gamma} - \frac{N}{\pi} \right) \cos(2x), \quad (13)$$

由于(8)和(13)式表示同一个解,所以其对应项应该相等,即

$$\begin{aligned} A^2 &= \eta^{1/\gamma}, \\ B^2 &= \frac{2N}{\pi} - \eta^{1/\gamma}. \end{aligned} \quad (14)$$

当 N 给定后, η 可由 (12) 式确定, 此时系统基态解在满足 (14) 式后就由 (13) 式给出, 但是 (12) 式为非线性方程, 对其任意 γ 不能直接解出 η , 因此下面就 $\gamma = 1$ (BEC 体系) 和 $\gamma = 2/3$ (超流 Fermi 体系) 分别进行讨论.

1) 当 $\gamma = 1$ 时, 由 (11) — (13) 式可得:

$$N = \left[\eta_1 - \frac{V_0}{4g_1} \right] \pi,$$

$$\eta_1 = \frac{N}{\pi} + \frac{V_0}{4g_1},$$

$$|\varphi|^2 = \frac{N}{\pi} + \frac{V_0}{4g_1} \cos(2x), \quad (15)$$

式中 $g_1 = 2^{2-\gamma} \pi^{1-\gamma} k^{3\gamma-2} a_m$. 显然应当满足 $N \geq \frac{V_0 \pi}{4g_1}$, 从而得到 BEC 在一维光晶格中的基态能量为

$$E = \frac{\pi(13N - 4\pi\eta_1) + 2k(3N^2 - 2N\pi\eta_1 + \pi^2\eta_1^2) a_m}{2\pi^2}. \quad (16)$$

2) 当 $\gamma = 2/3$ 时由 (11) — (13) 式可解得

$$N = \left[(\eta_2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} (\eta_2)^{\frac{1}{2}} \frac{V_0}{4g_2} \right] \pi,$$

$$\eta_2 = \frac{\left[V_0 + \pi^2 g_2 \left(256N^2 - \frac{\pi^2 V_0^3}{g_2^3} + 16N \sqrt{256N^2 - \frac{2\pi^2 V_0^3}{g_2^3}} \right)^{\frac{1}{3}} \right]^2}{8\pi^4 g_2^2 \left(256N^2 - \frac{\pi^2 V_0^3}{g_2^3} + 16N \sqrt{256N^2 - \frac{2\pi^2 V_0^3}{g_2^3}} \right)^{\frac{1}{3}}},$$

式中 $g_2 = 3^{2/3} \beta \pi^{(4-3\gamma)/3} k^{3\gamma-2} / 2^{\gamma+1}$. 从而得到超流 Fermi 气体在一维光晶格中的基态原子数密度和能量为

$$|\varphi|^2 = \frac{N}{\pi} + \left(\eta_2^{\frac{3}{2}} - \frac{N}{\pi} \right) \cos(2x), \quad (17)$$

$$E = \frac{20N + 5V_0(3N - \pi\eta_2^{3/2}) + 62^{1/3} 3^{2/3} N^{5/3} \left(1 + \frac{5(N - \pi\eta_2^{3/2})^2}{18N^2} \right)}{40\pi}. \quad (18)$$

(15) — (18) 式是本文得到的主要结果. 可以看出, BEC 和超流 Fermi 气体在一维光晶格中的基态粒子数分布和基态能量都与总原子数和光晶格强度密切相关. 并且还可以发现, 基态粒子数分布和能量在 BEC 端 ($\gamma = 1$) 与在 BCS 端 ($\gamma = 2/3$) 存在明显的差别.

图 1 给出了超流 Fermi 体系在 BCS 端 ($\gamma = 2/3$)

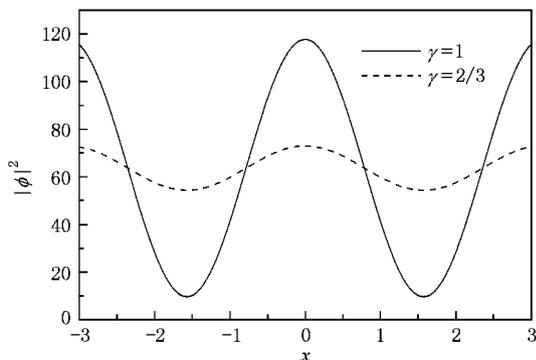


图 1 粒子数密度空间分布 ($V_0 = 5, N = 200$)

3) 和 BEC 端 ($\gamma = 1$) 的基态原子数密度分布. 结果表明, 在光晶格强度 V_0 、原子数 N 相同的情况下, BCS 端的基态原子数密度分布比 BEC 端更扩展 (这是由于 BCS 端存在 Fermi 压力所致).

图 2 给出了 BCS 端 ($\gamma = 2/3$) 和 BEC 端 ($\gamma = 1$) 平均能量 E 随晶格深度 V_0 的变化. 显然, BCS 端和

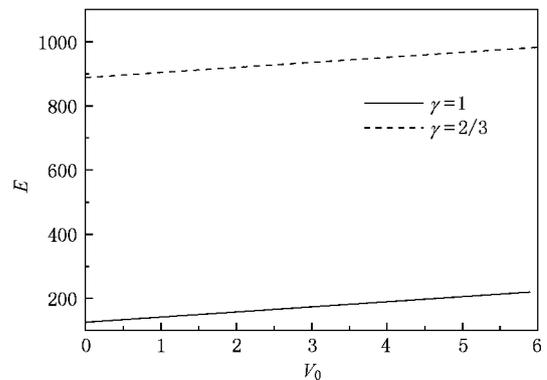


图 2 基态平均能量 E 随光晶格深度 V_0 的变化 ($N = 200$)

BEC 端平均能量均随阱深的增加而线性增加. 在晶格深度 V_0 给定、原子总数相同的情况下, BCS 端的平均能量明显高于 BEC 端的平均能量.

图 3 给出了 BCS 端 ($\gamma = 2/3$) 和 BEC 端 ($\gamma = 1$) 平均能量 E 随原子总数 N 的变化. 可看出, 当光晶格深度 V_0 给定时, BCS 端和 BEC 端的平均能量均随阱中原子总数的增加而增加, 但是 BCS 端的平均能量明显较 BEC 端增加的快.

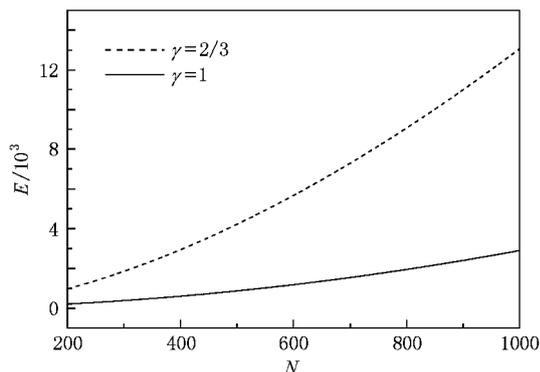


图 3 基态平均能量 E 随原子数 N 的变化 ($V_0 = 5$).

4. 结 论

本文研究了一维光晶格中超流 Fermi 气体的基态性质, 利用能量平衡条件, 即原子之间的相互作用能与晶格势能之和为一常数, 得到了系统的基态解, 求出了系统的化学势与系统基态对应的原子数分布以及总原子数和能量, 并对超流 Fermi 气体在 BCS 端和 BEC 端的基态解特征进行了分析和对比. 我们发现, 一维光晶格中超流 Fermi 气体基态分布具有一些特殊的性质, 并与 BEC 系统存在明显的差别.

众所周知, 超流 Fermi 系统是一强关联体系, 目前采用的超流体动力学模型是一强非线性薛定谔方程, 其精确解的求解更为复杂. 本文利用简捷的能量平衡法 (这一方法最近也被推广到求解非定态问题^[19]) 得到了系统的一组基态解, 所得基态解客观的反映了超流 Fermi 系统的一些基态特征, 对进一步从深层次理解超流 Fermi 气体的基态性质具有重要意义.

- [1] Greiner M, Regal C A, Jin D S 2003 *Nature* **426** 537
- [2] Regal C A, Greiner M, Jin D S 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 040403
- [3] Zhao X D, Xie Z W, Zhang W P 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6358 (in Chinese) [赵兴东、谢征微、张卫平 2007 *物理学报* **56** 6358]
- [4] Ma Y, Fu L B, Yang Z A, Liu J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5623 (in Chinese) [马云、傅立斌、杨志安、刘杰 2006 *物理学报* **55** 5623]
- [5] Zhou L, Kong L B, Zhan M S 2008 *Chin. Phys. B* **17** 1601
- [6] Wang G F, Liu B, Fu L B, Zhao H 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3733 (in Chinese) [王冠芳、刘彬、傅立斌、赵鸿 2007 *物理学报* **56** 3733]
- [7] Chin J K, Miller D E, Liu Y, Stan C, Setiawan W, Sanner C, Xu K, Ketterle W 2006 *Nature* **443** 961
- [8] Rodriguez M, Torma P 2004 *Phys. Rev. A* **69** 041602 (R)
- [9] Zhai H, Ho T L 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 10042
- [10] Moon E G, Nikolic' P, Sachdev S 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 230403
- [11] Pitaevskii L P, Stringari S, Orso G 2005 *Phys. Rev. A* **71** 053602
- [12] Kim Y E, Zubarev A L 2004 *Phys. Rev. A* **70** 033612
- [13] Manini N, Salasnich L 2005 *Phys. Rev. A* **71** 033625
- [14] Wen W, Zhou Y, Huang G X 2008 *Phys. Rev. A* **77** 033623
Wen W, Shen S Q, Huang G X 2010 *Phys. Rev. B* **81** 014528
- [15] Dong H, Ma Y L 2009 *Chin. Phys. B* **18** 715
- [16] Xue J K, Zhang A X 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 180401
Zhang A X, Xue J K 2009 *Phys. Rev. A* **80** 043617
- [17] Hai W, Lee C, Fang X, Gao K 2004 *Physica A* **335** 445
Hai W, Li Y, Xia B, Luo X 2005 *Euro. Phys. Lett.* **71** 28
- [18] Chen H J, Xue J K 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3962 (in Chinese) [陈海军、薛具奎 2008 *物理学报* **57** 3962]
- [19] Hai W, Lu G, Zhong H 2009 *Phys. Rev. A* **79** 053610

The ground state solutions of superfluid Fermi gas in optical lattices^{*}

Bai Xiao-Dong Liu Rui-Han Liu Lu Tang Rong-An Xue Ju-Kui[†]

(*College of Physics and Electronic Engineering, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China*)

(Received 15 April 2010; revised manuscript received 15 May 2010)

Abstract

The ground state solutions of superfluid Fermi gas in optical lattices are studied by means of the balance condition between the lattices potential and inter-atomic interaction energy. We derive the atoms density distribution, the atoms number and the energy of the ground state along the entire BEC-BCS crossover. It is shown that, the properties of the ground state present very different characters as the system transits from the BEC side to the BCS side.

Keywords: Superfluid Fermi Gas, Optical lattice, Ground state

PACC: 0365, 0530J, 0547, 1230

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10774120, 10975114), the Creation of Science and Technology of Northwest Normal University, China (Grant Nos. NWNNU-KJXCXC-03-17, NWNNU-KJXCXC-03-48).

[†] Corresponding author. E-mail: Xuejk@nwnu.edu.cn