# 粒子散射实验的理论模拟

师应龙<sup>1</sup>,丁晓彬<sup>1</sup>,李冀光<sup>1</sup>,董晨钟<sup>1,2</sup>

(1. 西北师范大学物理与电子工程学院,兰州 730070;2. 兰州重离子加速器国家实验室

原子核理论研究中心,兰州 730000)

摘要:本文在 粒子一次散射理论的基础上;进一步考虑了第二个原子对散射概率的贡献;建立了散射角与各散射参数 间的关系,通过改变 粒子的入射能量以及两原子的位置参量,较好地模拟了各种情况下的散射概率随散射角的分布情况,

关键词:散射概率:散射角:卢瑟福散射公式 中图分类号:0.561.5 文献标识码:A

1909 年 Rutherford 进行了 粒子散射实验,并 在此实验的基础上建立了原子的核式结构模型,开 创了原子物理学的新天地,该实验也为后人提供了 一种用散射手段研究物质结构的方法,对近代物理 的发展产生了深刻的影响,并在近现代物理学诸多 领域中有着广泛的应用,初学原子物理,最先接触的 是 Rutherford 散射,但常用的几种原子物理学教 材<sup>[1-3]</sup>只详细地给出了 粒子发生一次散射的理论. 该理论非常成功地解释了实验结果中的大角散射, 但对于小角散射情形,理论与实验结果明显不符,原 因是实验中的小角散射实际上是多次小角散射的合 成. Kruse<sup>[4]</sup>、Mantri<sup>[5]</sup>等人后来又对 Rutherford 散射 公式在小角散射时的局限性进行了讨论,他们指出 存在一个很小的临界角。,Rutherford 散射公式在 角度从 。到 180 ℃间是有效的. 但是这些讨论也只 是针对于一次散射进行的,而对于多次散射,现有资 料中基本上只是给出解释性的说明,没有理论上的 定量分析.因此,推导多次散射情形下散射概率的分 布情况是很有意义的一项工作.

本文从 粒子的一次散射理论出发,进一步推 导了 粒子的两次散射理论.我们在合理假设的基 础上建立了简单的靶结构模型,将两次散射看作是 两个一次散射,分两次应用一次散射理论,得出总的 散射公式.利用粒子散射到某一角度的散射概率与 入射时的微分截面成正比这一关系,用微分截面与 原子总截面之比代替粒子出射时的概率,推导出 粒子经过两次散射以后的概率分布情况,通过改变 粒子的入射能量以及靶原子位置参量 r(两原子之

文章编号:1000-9712(2007)05-0040-04

间的距离)、角(两原子连线与 粒子入射方向的 夹角)的值,模拟出了不同情况下的散射概率随散射 角的分布情况,较好地解释了小角散射的结果.

## 2 理论方法

粒子一次散射理论 2.1

Rutherford 散射理论<sup>[1]</sup>用经典力学的方法确定 了散射角 与瞄准距离 b 的关系:

$$\cot \frac{1}{2} = 4 \quad _{0} \frac{m v^{2}}{2 Ze^{2}} b$$
 (1)

称为库仓散射公式.式中m是 粒子的质量,Z是 靶材的核电荷数,从式(1)可以看出,与b有对应 关系;b大, 就小;b小, 就大;对于某一 b,有唯 一的 与之对应.

由库仓公式可知,凡通过图1所示以 b为内半 径,b+db为外半径的那个环的 粒子必定散射到 角度在 和 - d 之间的一个空心圆锥体之内.



图 1 瞄准距离与散射角的关系

根据库仓散射公式就可以得到卢瑟福的散射公 式:

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10376026,10434100)

作者简介:师应龙(1982 ---),男,甘肃天水人,西北师范大学物理与电子工程学院硕士生,主要从事原子结构与光谱的研究.

收稿日期:2006-10-16

$$\mathbf{d} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{Ze^2}{mv^2}\right)^2 \frac{\mathbf{d}}{\sin^4 \frac{1}{2}} \tag{2}$$

d 是 粒子散射到 与 -d 之间那么一个立体 角 d 内每个原子的有效散射截面,又称为微分截 面.d 具有面积的量纲,散射到某一立体角内的 粒子数与它成正比,所以 d 代表 粒子散射到立体 角 d 内的散射概率大小.

1913 年盖革和马斯顿进行的 粒子散射实验. 结果表明对散射角在 45 到 150 范围内的 粒子 .卢 瑟福散射理论是正确的,但是对散射角比较小的 粒子.理论与实验有较大的偏差.对于这个实验结果 我们可作如下理解:粒子通过金属箔,可以经过好多 原子的附近,因而是经过多次散射的.实际观察到的 较大的 角可以设想是由于一次大角散射和多次小 角散射的合成,但多次小角散射上下左右各方向都 有可能,合起来会抵消一部分,而且每次散射都小, 合并产生的方向改变比一次大角散射要小.因此有 大角散射存在的情况下,小角散射可以不计,一次散 射理论可以适用.至于实际观察到的较小的 角,那 是多次小角散射的合成.既然都是小角散射,哪一个 也不能忽略,一次散射理论就不适用. Kruse、Mantri 等人在 Rutherford 散射公式在小角散射时存在的局 限性方面进行了讨论,得到一个临界角。,散射公 式在角度从 。到 180 ℃间是有效的. 。的大小与 粒子入射能量有关,要较好的解释小角散射的结果, 还必须考虑靶中其他原子对 粒子的贡献,也就是 多次散射的累积效果.我们将从这个角度对此问题 进行更深入的分析.

#### 2.2 粒子的两次散射理论

为了简化推导,我们只考虑 粒子发生两次散射 的情形.假设靶材只有两层,各取两层面内的一个原子, 并且记两原子之间的距离为 r,它们连线与 粒子入射 方向的夹角为 .其简化后的结构如图 2 所示.



#### 图 2 两原子结构模型

粒子在原子外部时,由于核外电子的屏蔽效 应,靶原子是呈电中性的. 粒子只有进入到原子内 部时才能受到原子核的库仓力作用.因此, 粒子不 可能同时被两个靶原子散射. 粒子经过两个原子 时可以各自独立考虑一个原子对它的作用,相当于 发生了两次一次散射.每次散射时 粒子仅受到一 个原子的库仓场的作用,因此可以利用一次散射理 论.

如图 3 所示(为简化讨论,仅考虑同方向的两次 散射),分别以两个原子核为坐标原点建立直角坐标 系,仍假设在粒子与原子核相互作用过程中核的相 对位置不发生改变.粒子从左向右射入第一个原子 核时发生第一次散射,偏转角为 ;经过第二个原 子核时发生第二次散射,偏转角为 ;在两个原 子核对 粒子的作用是各自独立的,所以在两个坐 标系中分别运用一次散射的结论,故有



图 3 粒子发生两次散射时各参量间关系图

$$\cot \frac{1}{2} = \frac{4 - 0 m v^2}{2 Ze^2} b_1 \tag{3}$$

$$\cot \frac{2}{2} = \frac{4 - 0}{2 Ze^2} \frac{m v^2}{b_2} b_2$$
(4)

由几何关系可得

$$b_2 = b_1 + r\sin(1 - 1)$$
 (5)

还可知,粒子最终的散射角 与两次散射角的关系

= 1 + 2

根据三角函数关系及式(3)至式(6),得

$$\cot \frac{1}{2} = \cot \left( \frac{1}{2} + \frac{2}{2} \right) = \frac{1 - \tan \frac{1}{2} \tan \frac{2}{2}}{\tan \frac{1}{2} + \tan \frac{2}{2}} = \frac{1 - \left( \frac{2 Ze^2}{4 - 0 m \cdot v^2} \right)^2 \frac{1}{b_1 \cdot b_2}}{\frac{2 Ze^2}{4 - 0 m \cdot v^2} \frac{1}{b_1} + \frac{2 Ze^2}{4 - 0 m \cdot v^2} \frac{1}{b_2}} = \frac{4 - \frac{0}{2} m \cdot v^2}{2 Ze^2} \frac{b_1 \left[ b_1 + r\sin \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \right]}{b_1 + b_1 + r\sin \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right)} = \frac{2 Ze^2}{4 - 0 m \cdot v^2} \frac{b_1 \left[ b_1 + r\sin \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \right]}{b_1 + b_1 + r\sin \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right)} = \frac{2 Ze^2}{4 - 0 m \cdot v^2} \frac{1}{b_1 + b_1 + r\sin \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right)}$$
(7)

从式(3)还可得到

$$_{1} = 2 \operatorname{arccot}\left(\frac{4}{Ze^{2}} b_{1}\right)$$
(8)

式中  $E = \frac{1}{2} m v^2$  为 粒子入射时的能量. 把式(8) 代入式(7).有

42

$$\cot \frac{1}{2} = \frac{4}{Ze^2} \frac{b_1^2 + rb_1 \sin \left[2 \operatorname{arccot}\left(\frac{4}{Ze^2}b_1\right) - \frac{1}{2}\right]}{2b_1 + r\sin \left[2 \operatorname{arccot}\left(\frac{4}{Ze^2}b_1\right) - \frac{1}{2}\right]}$$
$$\frac{Ze^2}{4} \frac{1}{0E} \frac{1}{2b_1 + r\sin \left[2 \operatorname{arccot}\left(\frac{4}{Ze^2}b_1\right) - \frac{1}{2}\right]}$$

为了与一次散射情况作比较,把第一次入射时的瞄 准距离 b<sub>1</sub> 记为 b,则上式为

$$\cot \frac{1}{2} = \frac{4}{Ze^2} \frac{b^2 + rb\sin\left[2 \operatorname{arccot}\left(\frac{4}{Ze^2}b\right) - \right]}{2b + r\sin\left[2 \operatorname{arccot}\left(\frac{4}{Ze^2}b\right) - \right]}$$
$$\frac{Ze^2}{4} \frac{1}{0} \frac{1}{2b + r\sin\left[2 \operatorname{arccot}\left(\frac{4}{Ze^2}b\right) - \right]}$$

此式即为 粒子经过两次散射的散射公式. 2.3 粒子经过两次散射以后的概率分布模拟

在一次散射理论中,散射到某一角度的 粒子 数与入射圆环面积 d 成正比,因此我们可以用 d 代替散射的 粒子数,即用 d 与整个入射截面的比 值表示 粒子散射的概率.

假设入射粒子是均匀分布的.不同的瞄准距离 b有不同的散射角,可以考虑把瞄准距离 b 在其范 围内等分.相邻两 b 之间 粒子可看作散射到同一 散射角方向,认为介于 b<sub>i</sub>和 b<sub>i+1</sub>之间的所有粒子瞄 准距离都等于其平均值 b,根据散射公式可以得出 相应的散射角 ,那么粒子散射到该 方向的概率 就是此 b<sub>i</sub>和 b<sub>i+1</sub>所夹圆环面积与原子截面的比值. 间隔划分的大小直接影响着最后的结果,如果划分 间隔大,得到的结果就会比较粗糙,无法与实验对 比.为了与实验结果对比,实际情况中划分应由探测 器的线度决定,但为了得到更精确的结果,我们取了 更小的划分间隔(将 b 在其范围内划分为 10<sup>5</sup> 等 份).利用数值计算可以获得不同参量时的数据,得 出散射概率随散射角的分布曲线,从而得到不同观 测位置的散射概率.

# 3 散射概率分布结果及其讨论

## 3.1 散射概率随 粒子能量的变化情况

在较大散射角处,当入射 粒子的能量变化时, 二次散射与一次散射的概率分布在大角范围内是基 本一致的.也就是说在大角散射存在的情况下,小角 散射可以忽略不计,可以认为是一次散射的结果(为 了解释小角散射结果这里没有列出在整个散射角范 围内的概率分布情况).图4反映出在小角情形下, 一次散射与二次散射结果存在一定差异.能量对散 射概率的影响是:1)对于同一能量,在相同的散射 角观察时二次散射概率比一次的大;2)随着能量减 小,在一定角度 观察时一次与二次的散射概率都 增大.以上规律可以解释为:根据卢瑟福散射公式, 在某一 角所散射的粒子数应和它入射能量的平方 成反比.所以,能量减小时在 角度观察到的一次与 二次的散射概率都增大.



图 4 在小角情形下能量变化时,一次与二次散射 概率的分布情况

#### 3.2 散射概率与两个散射原子的位置之间的关系

当两个散射原子的位置参量变化时,考虑二次 散射所得结果与一次散射理论在大角范围内是一致 的.也就是说在大角散射存在的情况下,二次散射对 一次散射结果影响不大,一次散射理论是成立的.图 5反映出在小角情形下,一次散射与二次散射结果 存在一定差异.由于在一次散射中不涉及两个参量 r和,所以三条概率曲线重合为一条;而二次散射



图 5 在小角情形下两原子位置参量 变化时,一次 与二次散射概率的分布情况。

0

的概率随着参量 的增大而增大. 这规律可以解释 为:原来经过二次散射到达某一 角的粒子,当夹角 增大后可能只经过一次散射到达 角,而经过第 二个原子发生二次散射到达 角的粒子数将增加. 所以,二次散射的概率随着参量 的增大而增大. 对 于两原子位置参量 r 变化时散射概率分布情况和此 相似,所以没有单独再作讨论.

## 4 结束语

本文在经典一次散射理论框架下,在给定靶材 结构的情况下,研究了两原子情况时 粒子的散射 规律,并与一次散射的结论进行了比较.结果表明, 在只考虑二次散射的情况下,在大角范围内二次散 射与一次散射的概率分布差别不大,一次散射理论 是成立的.但是,在小角情形下,一次散射与二次散 射的概率分布存在明显差异.此时一次散射理论是 不适用的,考虑二次散射后的概率分布较好地解释 了小角散射的结果,出现的较小的散射角 可以认 为是多次小角散射的合成.同理,可以模拟出三次或 更多次的散射规律,此项工作有待以后进一步完善.

## 参考文献:

- [1] 褚圣麟. 原子物理学[M]. 北京:高等教育出版社, 1979:8-18.
- [2] 顾建忠. 原子物理学 [M]. 北京:高等教育出版社, 1986:20-25.
- [3] 杨福家.原子物理学[M].上海:上海科学技术出版社, 1985:11-14.
- [4] Mantri A N. On the Small-angle end of the Rutherford Scattering Formula[J]. Am J Phys, 1977, 45:1122.
- [5] Olan E, Kruse. A look at the Small-angle end of the Rutherford Scattering Formula[J]. Am J Phys, 1975, 43:328.
- [6] MacDonald J R ,et al. How well does<sup>4</sup> He backscattering from low-Z nuclei obey the Rutherford formula? [J]. J Appl Phys, 1983, 54:1 800.

# Theoretical simulation of alpha scattering experiment

SHI Ying-long<sup>1</sup>, DING Xiao-bin<sup>1</sup>, LI Ji-guang<sup>1</sup>, DONG Chen-zhong<sup>1,2</sup>

(1. College of Physics and Electronic Engineering ,Northwest Normal University ,Lanzhou 730070 ,China ;

 Center of Theoretical Nuclear Physics ,National Laboratory of Heavy Ion Accelerator of Lanzhou , Lanzhou 730000 ,China)

Abstract :Based on a single scattering theory of alpha particle, the contribution to the total scattering from the second atom are included ,and the relationship among the scattering angle and other scattering parameters is established. By adjusting the scattering parameters ,such as incident energy of alpha particle and the position parameter of tow atoms ,the distribution of scattering probability in different conditios is simulated.

Key words: scattering probability; scattering angle; Rutherford scattering formula

#### (上接 39 页)

# Near-field optical experiments based on Michelson interferometer

XU Ping ,QIAN Jian-qiang , YU Wei ,CAI Wei , YAO Jun-en (School of Science ,Beihang University ,Beijing 100083 ,China)

Abstract : A kind of near-field optical experimental device based on Michelson interferometer is introduced. The device can be used for measurement of evanescent field exist in the near-field of prism surface when total internal reflection occur ,also it can be used to observe the near-field optical structure of two dimensional grating and experiments of photon scanning tunneling microscope in principle. It is helpful for students to understand the structure of evanescent field and basic principle of scanning near-field optical microscope. The device is simple and easy to operate ;also it has the advantage of high reliability ,so it is suitable to be applied in physics experiment.

Key words: Michelson interferometer; tota linternal reflection; scanning near-field optical microscope; photon scanning tunneling microscope