

文章编号: 1000-0364(2008)0 -000-07

等离子体屏蔽效应对类氢离子束缚态的影响

李博文¹, 蒋 军¹, 董晨钟^{1,2}, 康伟民¹, 杨宁选¹

(1. 西北师范大学物理与工程学院, 兰州 730070;

2. 西北师范大学与中科院近代物理研究所极端环境原子分子物理联合实验室, 兰州 730070)

摘 要: 在 Debye 屏蔽近似下, 通过求解 Schrödinger 方程, 计算了处于等离子体中的类氢离子的束缚态能量本征值与本征函数. 研究了氢原子和类氢 Fe^{25+} 离子的 $n l$ ($n=1-4, l=0-3$) 态能级随 Debye 屏蔽长度 λ 的变化规律. 进一步, 分析了等离子体屏蔽效应随主量子数 n 及角量子数 l 的变化规律, 发现对于给定的 l , 等离子体屏蔽效应随主量子数 n 的增加而增大; 对于给定的 n , 等离子体屏蔽效应随角量子数 l 的增大而减小. 最后, 我们分析了等离子体环境中类氢等电子序列离子的能级和波函数随屏蔽参数 λ 的变化规律, 发现随着原子序数增大, 等离子体屏蔽效应的影响逐渐变小.

关键词: 等离子体屏蔽; Debye 模型; 原子结构; 束缚态

中图分类号: O562.1 文献标识码: A

Bound states of hydrogen-like ions in Debye plasma

LI Bo-Wen¹, JIANG Jun¹, DONG Chen-Zhong^{1,2}, KANG Wei-Min¹, YANG Ning-Xuan¹

(1. College of Physics and Electronic Engineering, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China;

2. Center of Theoretical Nuclear Physics, National Laboratory of Heavy Ion Accelerator of Lanzhou, Lanzhou 730000, China)

Abstract: The plasma screening effects on the energy levels and wave functions of hydrogen-like ions were estimated by using Debye model. The effects on $n l$ ($n=1-4, l=0-3$) energy levels and wave functions of hydrogen and Fe^{25+} ion versus screening lengths have been analyzed. Furthermore, the screening effects versus quantum number n and l has been analyzed. The results show that the screening effects increasing as n increasing and decreasing as l increasing. Last, the Eigenenergies of isoelectronic series change against screening parameter, has been discussed, it's shown that the plasma screening effects are decreasing as nuclear charge increasing.

Key words: Plasma screening Debye model Atomic structure Bound states

1 引 言

等离子体环境对原子(离子)结构和性质的影响是目前天体物理、等离子体物理、凝聚态物理和其它很多领域共同关注的课题. 很长时间以来, 在磁约束聚变(MCF)^[1-2]、惯性约束聚变(ICF)^[3-4]和 X 射线激光的研究^[5-6]中人们所采用的理论原子数据大都是在孤立原子模型近似下获得的. 然

而, 目前的实验已能产生粒子密度接近 10^{25} cm^{-3} 、温度大于 10^3 eV 的等离子体. 在如此高温高密的极端条件下, 等离子体环境对于原子(离子)结构及各种原子过程将有极大的影响, 因此研究处在等离子体环境中的原子(离子)的行为是一项极有意义的课题.

已有的研究表明^[7-9], 在稠密等离子体中, 原子(离子)与周围带电粒子的 Coulomb 相互作用能

收稿日期: 2006-12-10

基金项目: 国家自然科学基金(10434100, 10774122), 高等学校博士学科点专项科研基金(20070736001), 兰州重离子加速器国家实验室原子核理论中心基金及西北师范大学科技创新工程项目(NWNU-KJCXGC-03-21)资助的课题.

作者简介: 李博文(1984-), 男, 回族, 甘肃张家川人, 硕士研究生, 从事原子结构与光谱研究.

通讯作者: 董晨钟. E-mail: dongcz@nwnu.edu.cn

够使原子(离子)结构和性质发生明显的变化. 等离子体对处在其中的原子(离子)的这种效应可以通过引入有效屏蔽势来描述. 同时, 在高温等离子体环境中, 各种粒子的热运动也对原子(离子)结构和性质有重要影响. 因此, 要完整地描述等离子体环境中的原子(离子)的性质, Coulomb 效应和热力学效应必须同时考虑. 人们通常利用 Coulomb 参数 Γ 来判断哪种效应占主要地位^[10]. 其中, Γ 定义为粒子的平均 Coulomb 势能和平均动能之比. 即 $\Gamma = \langle Z_i e \rangle^2 / R_i kT$, 这里 $\langle Z_i e \rangle$ 是等离子体中离子的平均带电量, R_i 是离子间的平均距离. 如果 $\Gamma \gg 1$, 称其为强耦合等离子体; 如果 $\Gamma \ll 1$, 称其为弱耦合等离子体. 目前按耦合强度 Γ 的不同, 可以分别采用 Debye-Hückel 屏蔽模型或者离子球 (IS) 模型. 其中 Debye-Hückel 模型是由线性化的 Poisson-Boltzmann 方程得到的^[10], 主要应用于低密高温 ($\Gamma \ll 1$, 弱耦合等离子体) 等离子体. Rozsnyai^[11] 等人发现 Debye-Hückel 模型在距离离子较远的时候是 Hartree-Slater 势的一个很好的近似. 离子球模型是针对高密低温等离子体环境中 ($\Gamma \gg 1$, 强耦合等离子体) 静电屏蔽势的计算而提出来的^[12].

有关等离子体对原子束缚态能级和电离势的影响, Roussel 和 O'Connell^[7], Rogers^[8], Saha^[9], Lam 和 Varshni^[13], Okutsu^[14], Ho^[15] 以及李向东^[16-17] 和胡先权^[18] 等人已经做了一定的研究. 结果表明, 等离子体屏蔽效应可以降低电子的电离势, 并使光谱线发生移动. 目前已经有部分的实验结果^[19-21]. 但是这些研究主要集中在讨论等离子体屏蔽效应引起的能级偏移及临界行为等方面, 而对于等离子体效应随量子数 n, l 的变化及等离子体效应随等电子序列的变化目前还没有文章详细的讨论.

本文使用 Debye 模型, 通过求解 Schrödinger 方程, 分析了等离子体环境对于原子能级结构的影响. 详细讨论了不同等离子体环境中 Fe^{25+} 离子电子波函数随量子数 n, l 变化, 并研究了等离子体屏蔽效应对类氢 O^{7+} , Si^{13+} , Ar^{17+} , Fe^{25+} 等电子序列的影响, 得到了一些重要的规律. 第二部分简单介绍了使用的理论方法, 第三部分给出了计算结果和分析, 首先为了证明本文方法的正确性, 我们把我们的计算的等离子体中的氢原子的本征能和 Roussel 等人的计算结果^[7] 做了比较. 其次我们分析了类氢 Fe^{25+} 离子波函数随屏蔽参数 λ 的变化规律. 最后, 我们分析了类氢等电子序列束缚态能级

随屏蔽参数 λ 的变化规律. 主要结论在第四部分给出. 文章将采用原子单位, $m = \hbar = e = 1$.

2 理论方法

2.1 等离子体的 Debye 模型

在 Debye 模型中, 原子核与电子之间的相互作用表达为^[10]:

$$V^{DH}(r) = -\frac{Z}{r} e^{-\frac{r}{\lambda}} \quad (1)$$

式中 Z 为核电荷数, λ 为 Debye 长度, 与等离子体平均电子密度 n_e 及电子温度 T_e 之间的关系为:

$$\lambda = \left[\frac{kT_e}{4\pi n_e} \right]^{1/2} \quad (2)$$

式中 k 为 Boltzmann 常量. 即, 某个给定的 λ 相应于特定的等离子体环境. λ 越小说明等离子体耦合越强. Debye 势在核物理中也称为 Yukawa 势.

2.2 等离子体环境中类氢离子的 Schrödinger 方程

处于等离子体环境中的类氢离子的 Hamiltonian 可以写为:

$$H^{DH} = -\frac{1}{2} \nabla^2 + V^{DH}(r) \quad (3)$$

其中, 第一项为电子的动能算符, $V^{DH}(r)$ 表示电子与核之间的 Coulomb 相互作用, 具体形式由 (1) 式给出. 因此处于等离子体环境中的类氢离子的 Schrödinger 方程可写为:

$$H^{DH} \psi_i = E_i \psi_i \quad (4)$$

由方程 (1) 可以看出 Debye 势具有球对称性, 因此 Schrödinger 方程可以进一步简化, 令

$$\psi_i(x) = \frac{P_i(r)}{r} Y_i(\theta, \varphi) \chi_i(\sigma)$$

其中 $P_i(r)/r$ 是径向波函数, $Y_i(\theta, \varphi)$ 是角向波函数, $\chi_i(\sigma)$ 是自旋波函数. 由此得径向方程为:

$$\frac{d^2 P_i(r)}{dr^2} + [2E_i - 2V^{DH}(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}] P_i(r) = 0 \quad (5)$$

E_i 为 i 态的能量本征值, l 是 i 态的轨道量子数. 对于方程 (5) 的求解我们采用 Numerov 方法. 该算法可以参考相关书籍 (如赵伊君著《原子结构的计算》^[22]), 本文不做详细讨论.

3 结果与讨论

3.1 等离子体屏蔽效应对原子能级的影响临界行为

为了说明本文方法的可靠性, 表 1 给出了我们

以及

计算的氢原子的 nl ($n=1-4, l=0-3$) 态的本征能, 并与 Roussel 等人的计算结果^[7] 做了比较. 从表 1 可以看出, 我们的计算结果和文献^[7] 相应的结果符合的很好, 最大的相对差值不超过 1%.

从表 1 还可以看出, 由于等离子体的屏蔽效应, 所有束缚态能级向连续态偏移, 偏移量随着屏蔽参数 λ 的减小而增大. 相应地孤立原子的角量子数 l 简并在等离子体中被破坏, 即对于孤立氢原子, 其能量本征值只与主量子数 n 有关而与角量子数 l 无关, 所以所有 n 个 nl ($l=0, 1, \dots, n-1$) 轨道能量是简并的, 但是在等离子体中, 由于等离子体屏蔽效应的影响, 这些能级的 l 简并在小的 λ 、即强屏蔽作用下, 这些 nl ($l=0, 1, \dots, n-1$) 轨道能量不再是简并的. 这一结果也得到了 Rogers^[8] 等人的证实. 因此, 使我们从孤立原子结构的能级顺序推断等离子体中的原子能级顺序变得复杂.

此外, 计算发现, 在等离子体环境中, 原子的束缚态能级出现了临界行为. 即当 $\lambda = \infty$ 时, Debye 势退化为 Coulomb 势, 原子的束缚态能级数目为无限, 即等于主量子数 n . 但是当离子处于等离子体

环境中时, 一方面由于在特定的密度条件下原子的有效半径是有限的, 另一方面由于外场 (即等离子体屏蔽) 的存在, 使得原子的束缚态在特定的等离子体条件下将变为有限. 等离子体中原子束缚态能级的临界行为被人们所关注是由于其在原子物理、凝聚态物理和天体物理等领域具有重要的应用意义. 原子束缚态能级能量向连续态漂移会影响原子的碰撞过程, 这将影响离子态分布的变化, 并导致不同的等离子体环境将出现不同的辐射光谱. 对于临界行为的出现可以做如下分析: 由于所有束缚态能级能量向连续态漂移, 对于给定的原子态, 能级漂移随屏蔽参数 λ 的减小而增大, 对于某些 λ , E_{nl} 将大于 0. 原来的束缚态 $-E_0 \leq E_{nl} \leq 0$ 将不再存在, 这些束缚态将在临界屏蔽长度 λ_c 处截断. 因此孤立原子中的无限个束缚态在等离子体屏蔽下变为了有限个束缚态. 表 1 中相应于某些 λ 束缚能没有给出, 表示在这些 λ 下束缚态能级已经进入了连续态. 如 $1s$ 轨道, $\lambda=5$ 时轨道处于束缚态, 而 $4s$ 轨道当 $\lambda=20$ 时已经进入了连续态.

为了进一步说明等离子体屏蔽效应对原子

表 1 Debye 模型下氢原子的 $1s-4f$ 态束缚能 (能量单位: Hartree)

Table 1 Binding energy of states $1s-4f$ for Debye potential with Hydrogen atom (in units of Hartree)

State	Method	Screening strengths λ (in a_0)							
		1000	500	100	40	30	15	9	5
$1s$	Our	0.5039	0.5029	0.4939	0.4795	0.4716	0.4365	0.3988	0.3278
	Ref[7]	0.4990	0.4980	0.4901	0.4755	0.4675	0.4366	0.3976	0.3268
$2s$	Our	0.1240	0.1230	0.1277	0.1018	0.0948	0.0742	0.0445	0.0121
	Ref[7]	0.1240	0.1230	0.1153	0.1018	0.0948	0.0700	0.0442	0.0121
$2p$	Our	0.1391	0.1391	0.1198	0.1043	0.0987	0.0686	0.0405	
	Ref[7]	0.1240	0.1230	0.1153	0.1015	0.0943	0.0683	0.0402	
$3s$	Our	0.0563	0.0587	0.0440	0.0365	0.0286	0.0130		
	Ref[7]	0.0546	0.0536	0.0462	0.0343	0.0287	0.0122		
$3p$	Our	0.0587	0.0526	0.0440	0.0365	0.0281	0.0121		
	Ref[7]	0.0546	0.0536	0.0462	0.0341	0.0283	0.0110		
$3d$	Our	0.0530	0.0530	0.0479	0.0330	0.0272	0.0085		
	Ref[7]	0.0549	0.0536	0.0461	0.0336	0.0275			
$4s$	Our	0.0303	0.0293	0.0223	0.0123	0.0082			
	Ref[7]	0.0303	0.0293	0.0224	0.0125	0.0085			
$4p$	Our	0.0298	0.0298	0.0224	0.0130	0.0081			
	Ref[7]	0.0303	0.0293	0.0223	0.0123	0.0082			
$4d$	Our	0.0298	0.0292	0.0224	0.0116	0.0087			
	Ref[7]	0.0303	0.0293	0.0222	0.0119	0.0075			
$4f$	Our	0.0325	0.0280	0.0244	0.0126	0.0063			
	Ref[7]	0.0303	0.0293	0.0221	0.0112	0.0065			

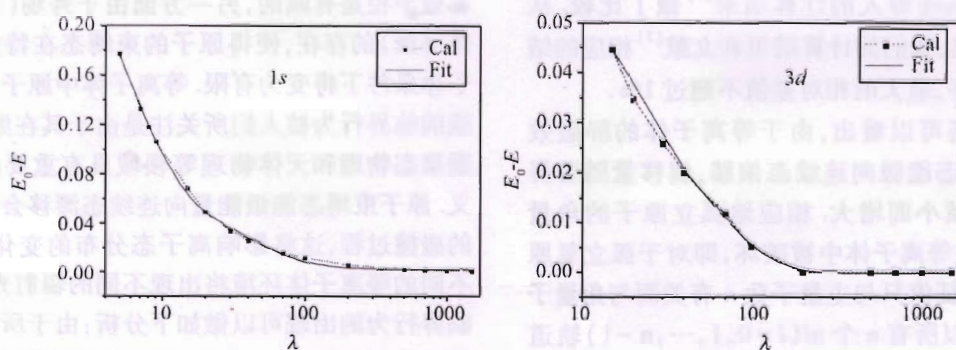


图1 Debye 模型下氢原子 1s 和 3d 轨道的能量本征值与孤立原子中的 1s 和 3d 轨道的能量本征值差随屏蔽参数 λ 的变化, (···) 为计算结果, (—) 为拟合结果.

Fig. 1 Energy difference of 1s (a) and 3d (b) orbit of hydrogen atom between screened and unscreened circumstance.

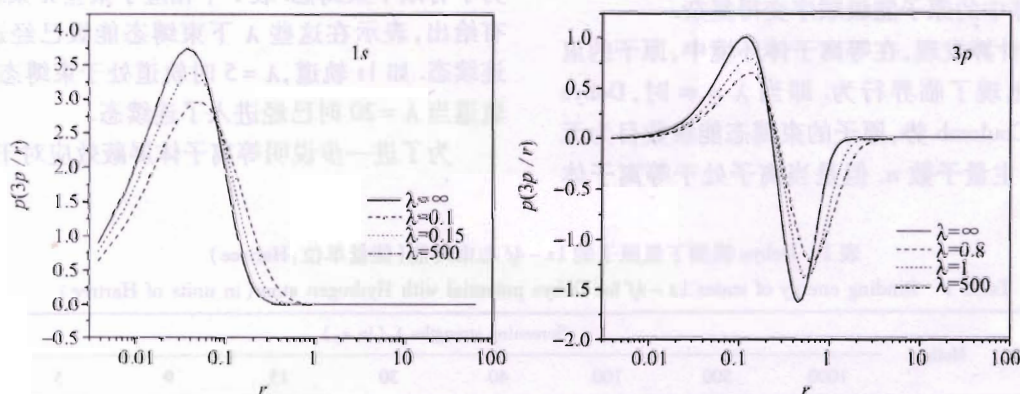


图2 等离子体环境中的 Fe^{25+} 离子的 1s 和 3p 轨道波函数随屏蔽长度 λ 的变化

Fig. 2 Wave Functions of Fe^{25+} ion of 1s and 3p orbit versus screening lengths λ

束缚态能级能量的影响,图1分别给出了氢原子 1s 和 3d 轨道非屏蔽和屏蔽情况下的能量差 ($\Delta E = E_0 - E$) 随屏蔽参数 λ 的变化规律. 图中实线为计算结果,虚线为二阶指数衰减拟合结果. 可以看出,随着屏蔽参数 λ 的增大,能量差变小.

3.2 等离子体屏蔽效应对波函数的影响

3.2.1 等离子体屏蔽效应对不同轨道波函数的影响 图2展示了等离子体环境中 Fe^{25+} 离子 1s 和 3p 轨道波函数随屏蔽长度 λ 的变化,其中, $\lambda = \infty$ 相应于无屏蔽情形, $\lambda = 500$ 表示弱耦合等离子体, λ 越小表示等离子体环境越强. 图2表现出了期望的结果:在等离子体环境中,电子的几率密度分布向偏离原点的位置漂移,峰值降低了,同时这些效应随着屏蔽参数 λ 的减小而增大.

从图2可以看出,等离子体屏蔽效应对不同

量子态的影响不同,为了说明这种变化,我们比较了等离子体屏蔽效应对不同量子数 n 和 l 的本征函数的影响.

3.2.2 等离子体屏蔽效应随主量子数 n 的变化

图3给出了等离子体环境中 Fe^{25+} 离子 ns ($n = 1, 2, 3, 4$) 态波函数随屏蔽参数 λ 的变化规律,其中屏蔽参数 λ 分别取 1.0 和 3.0. 可以看出,主量子数 n 越大,屏蔽效应的影响越大. 这一现象可以解释为:对于 Fe^{25+} 离子,主量子数越大,原子核对于电子的束缚越松,所以等离子体屏蔽的影响越大. 另一方面应该注意到,等离子体屏蔽效应对波函数的影响对于屏蔽参数的变化十分敏感. 相应于不同的屏蔽参数 λ ,屏蔽波函数和非屏蔽波函数的差异随 λ 的增大急剧减小. 如图所示,当 $\lambda = 3$ 时,1s, 2s 和 3s 态波函数和非屏蔽情况下趋于一致,只有 4s 轨道存在较小差异. 这与 $\lambda = 1.0$ 的情况存在较大差别.

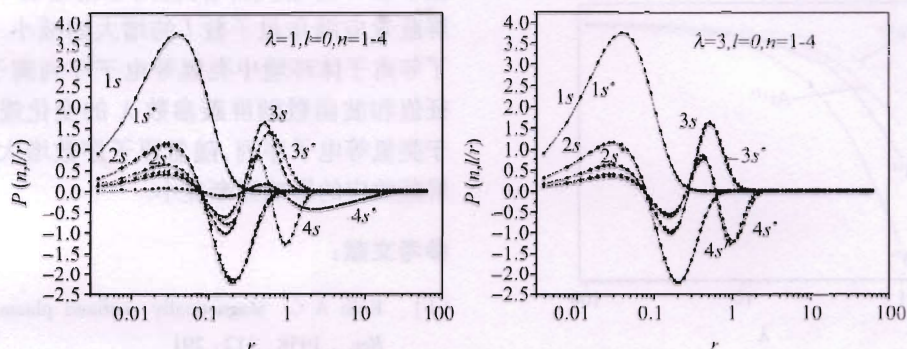


图3 等离子体中 Fe^{25+} 离子 ns ($n=1-4$) 轨道波函数随屏蔽长度 λ 的变化, (* 表示有屏蔽情形).

Fig. 3 Wave functions change for ns ($n=1-4$) orbits for different screening length λ .

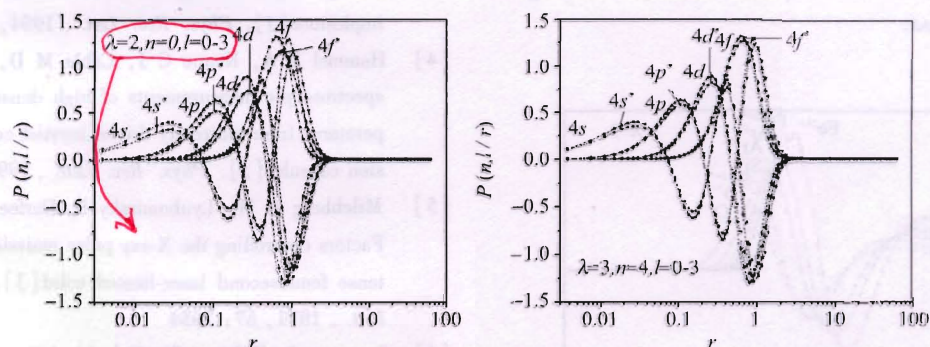


图4 等离子体中 Fe^{25+} 离子 $4l$ ($n=1, 2, 3, 4$) 轨道波函数随屏蔽长度 λ 的变化 (* 表示有屏蔽情形).

Fig. 4 Wave functions change for fixed n different l for different screening length λ .

3.2.3 等离子体屏蔽效应随角量子数 l 的变化

由 3.2.2 的分析我们看出,等离子体屏蔽效应随主量子数的增加而增大,因此为了分析等离子体屏蔽效应随角量子数 l 的变化,图 4 给出了等离子体环境中 Fe^{25+} 离子 $4l$ ($l=s, p, d, f$) 轨道波函数随等离子体屏蔽参数的变化,屏蔽参数 λ 分别取 2.0 和 3.0. 从图中可以看出:一方面屏蔽效应随 λ 的增大而减小;另一方面,对于给定的 λ , l 越小,波函数外扩越显著. 这一现象可以理解为: $4l$ 轨道的角量子数 l 越小,轨道就越“扁”(即椭圆轨道的偏心率越大),因此等离子体环境对其影响越大. 这一行为也可以解释 l 轨道简并的破坏,正如 3.1 节所讨论的.

3.3 等离子体屏蔽效应沿等电子序列的变化

以上主要讨论了等离子体屏蔽效应对 Fe^{25+} 离子的影响,这里我们进一步分析等离子体屏蔽效应对类氢等电子序列离子的能量本征值和波函

数的影响. 图 5 所示的是类氢 O^{7+} , Si^{13+} , Ar^{17+} , Fe^{25+} 离子 $1s$ 轨道能量本征值随屏蔽参数 λ 的变化. 从图 5 可以看出,当屏蔽参数 λ 较小时,不同离子的能量本征值变化很大,而当 λ 超过某一定值时,这种变化相对比较平缓,且逐步接近孤立离子的结果. 这可以解释为:当 λ 较小时,等离子体屏蔽效应很强,所以对原子束缚态的影响也比较大;而当 λ 较大时,屏蔽效应减弱,超过一定值时,Debye 势趋于 Coulomb 势,即等离子体趋于非屏蔽环境,所以变化平缓. 另外,沿着等电子序列从 O^{7+} 到 Fe^{25+} ,随着原子序数增大,原子核对于电子的束缚越紧,因此等离子体环境的影响越小. 这一规律从等电子序列波函数的变化规律也可以清楚的看到. 图 6 给出了这些离子在非屏蔽和屏蔽环境下的 $3s$ 轨道波函数的变化规律. 图 6 中,取屏蔽长度 $\lambda=3$,考虑等离子体屏蔽效应后, O^{7+} 离子波函数差别最大,这种差异随着原子序数的增大而减小,对于 Fe^{25+} 离子,差别已经非常小.

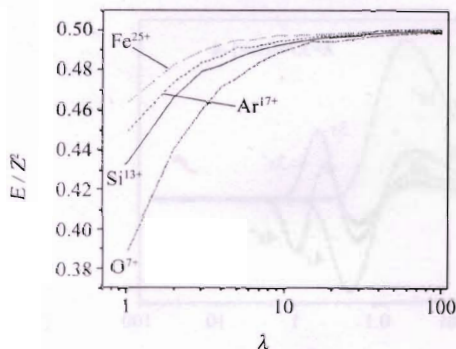


图5 类氢等电子序列能量本征值随屏蔽参数 λ 的变化。

Fig. 5 The energy level of 1s state of different Hydrogen-like isoelectronic sequence versus the screening lengths λ .

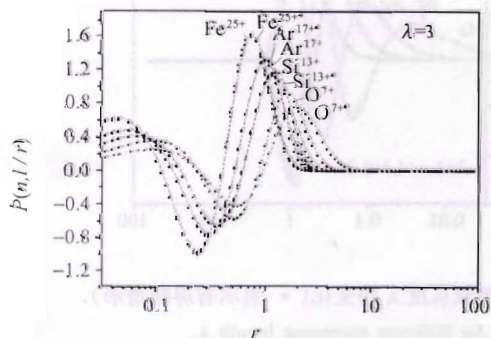


图6 类氢等电子序列3s轨道波函数随屏蔽参数 λ 的变化(*表示有屏蔽情形)。

Fig. 6 The wave functions of 3s states of H-like isoelectronic sequence versus screening length λ .

4 结论

总之,本文通过数值求解等离子体 Debye 屏蔽模型下的类氢离子 Schrödinger 方程,研究了等离子体屏蔽效应对原子束缚态能级的影响。结果表明:在等离子体环境中,束缚态能级能量向连续态漂移,并且随着屏蔽参数的减小而增大。相应于孤立原子的 l 简并在一定程度上被消除。通过计算,我们肯定了临界行为的存在,即由于等离子体的屏蔽效应,原子的束缚态将在临界屏蔽长度 λ_c 处截断,因此相应于孤立原子中的无限个束缚态在等离子体屏蔽下变为了有限个。进一步,我们分析了等离子体屏蔽效应随主量子数 n 及角量子数 l 的变化规律,发现对于给定的 l ,等离子体屏蔽效应随主

量子数 n 的增大而增大;对于给定的 n ,等离子体屏蔽效应随角量子数 l 的增大而减小。最后,分析了等离子体环境中类氢等电子序列离子的能量本征值和波函数随屏蔽参数 λ 的变化规律,发现对于类氢等电子序列,随着原子序数增大,等离子体屏蔽效应的影响逐渐变小。

参考文献:

- [1] Kolb A C. Magnetically confined plasma [J]. *Phys. Rev.*, 1958, 112: 291
- [2] Boozer A H. Physics of magnetically confined plasmas [J]. *Rev. Mod. Phys.*, 2004, 76: 1071
- [3] Cable M D, Hatchett S P, Caird J A, et al. Indirectly driven, high convergence inertial confinement fusion implosions [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1994, 73: 2316
- [4] Hammel B A, Keane C J, Cable M D, et al. X-ray spectroscopic measurements of high densities and temperatures from indirectly driven inertial confinement fusion capsules [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1993, 70: 1263
- [5] Milchberg H M, Lyubomirsky I, Durfee G G, et al. Factors controlling the X-ray pulse emission from an intense femtosecond laser-heated solid [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1991, 67: 2654
- [6] Saemann A, Eidmann K, Golovkin I E, et al. Isochoric heating of solid aluminum by ultrashort laser pulses focused on a tamped target [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1999, 82: 4843
- [7] Roussel K M and O'Connell. Variational solution of Schrödinger's equation for the static screened Coulomb potential [J]. *Phys. Rev. A*, 1971, 9: 52
- [8] Rogers F J, Graboske H C. Bound eigen states of the static screened coulomb potential [J]. *Phys. Rev. A*, 1970, 1: 1577
- [9] Sil A N, Saha B, Mukherjee P K. Effect of dense plasma on the spectral properties of Hydrogenic Ions [J]. *International Journal of Quantum Chemistry*, 2005, 104: 903
- [10] Whitten B L, Lane N F, Weisheit J C. Plasma-screening effects on electron-impact excitation of hydrogenic ions in dense plasmas [J]. *Phys. Rev. A*, 1984, 29: 945
- [11] Rozsnyai B F. Computation of free-free Gaunt factors and conductive opacities in hot matter [J]. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer.*, 1979, 22: 337
- [12] Murillo M S, Weisheit J C. Dense plasmas, screened interactions, and atomic ionization [J]. *Phys. Rep.*, 1998, 302: 1

- [13] Lam C S, Varshni Y P. Energies of s Eigen states in a static screened Coulomb potential[J]. *Phys. Rev. A*, 1971, 4: 1875
- [14] Okutsu H, Sako T, Yamanouchi K, *et al.* Electronic structure of atoms in laser plasma: a Debye shielding approach[J]. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, 2005, 38: 917
- [15] Kar S, Ho Y K. Bound D-states of helium atom under Debye screening[J]. *International Journal of Quantum Chemistry*, 2007, 107: 353
- [16] Zhang Li, Li X D. Influence of plasma effect on energy level of H-like ions C^{5+} [J]. *Acta Optica Sinica*, 2006, 26: 1755 [张丽, 李向东. 等离子体屏蔽效应对碳的类氢离子能级的影响[J]. *光学学报*, 2006, 26: 1755]
- [17] Li X D, Li Z S. A novel formula to estimate the plasma density effects on the energy levels of H-like ions from $Z=6$ to 30 [J]. *J. At. Mol. Phys.*, 2007, 24: 268 [李向东, 李重石. 估算等离子体效应对类氢离子束缚态能级能量影响的新公式[J]. *原子与分子物理学报*, 2007, 24: 268]
- [18] Hu X Q, Hu W J, Ma Y. Solution of the level of approximation analytic formula and the solution of power series for hydrogen-like atoms in condition of Debye potential[J]. *J. At. Mol. Phys.*, 2002, 19: 156 [胡先权, 胡文江, 马勇. 德拜势中氢原子能级近似解析式与幂级数求解[J]. *原子与分子物理学报*, 2002, 19: 156]
- [19] Bradley D K, Kilkenny J, Rose S J, *et al.* Time-resolved continuum-edge-shift measurements in laser-shocked solids [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1987, 59: 2995
- [20] Schawanda W, Eidman K. Observation of radioactive burn through in X-ray heated Beryllium by time-resolved spectroscopy [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1992, 69: 3507
- [21] Boeddeker St, Guenter S, Koenies A, *et al.* Shift and width of the H_{α} line of Hydrogen in dense plasma[J]. *Phys. Rev. E*, 1993, 47: 2785
- [22] Zhao Y J, Zhang Z J. *Calculation of atomic structure* [M]. Beijing: Science Publishing House, 1987. [赵伊君, 张志杰. *原子结构的计算* [M]. 北京: 科学出版社, 1987]