第五章 相似矩阵及二次型

§1. 向量的内积、长度及正交性

定义1：设有n维向量 $\vec{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$，$\vec{y}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}$

令 $[\vec{x},\vec{y}]=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$，$[\vec{x},\vec{y}]$ 称为向量 $\vec{x}$ 与 $\vec{y}$ 的内积。

内积是两个向量之间的一种运算，其结果是一个实数。

当 $\vec{x}$ 与 $\vec{y}$ 都是列向量时，有 $[\vec{x},\vec{y}]=\vec{x}^T\vec{y}$.

内积的性质：（$\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ 为n维向量，λ 为实数）

i $[\vec{x},\vec{y}]=[\vec{y},\vec{x}]$

ii $[\lambda\vec{x},\vec{y}]=\lambda[\vec{x},\vec{y}]$

iii $[\vec{x}+\vec{y},\vec{z}]=[\vec{x},\vec{z}]+[\vec{y},\vec{z}]$

iv 当 $\vec{x}=0$ 时，$[\vec{x},\vec{x}]=0$；当 $\vec{x}\neq 0$ 时，$[\vec{x},\vec{x}]>0$.

施瓦茨不等式：$[\vec{x},\vec{y}]^2\leq[\vec{x},\vec{x}][\vec{y},\vec{y}]$

定义2：令 $\|\vec{x}\|=\sqrt{[\vec{x},\vec{x}]}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$，$\|\vec{x}\|$ 称为n维向量 $\vec{x}$ 的长度（范数）.

当 $\|\vec{x}\|=1$ 时，称 $\vec{x}$ 为单位向量.

向量长度的性质：

i 非负性：当 $\vec{x}\neq 0$ 时，$\|\vec{x}\|>0$；当 $\vec{x}=0$ 时，$\|\vec{x}\|=0$.

ii 齐次性：$\|\lambda\vec{x}\|=|\lambda|\,\|\vec{x}\|$

iii 三角不等式：$\|\vec{x}+\vec{y}\|\leq\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|$.

证明iii：

$$\begin{aligned}\|\vec{x}+\vec{y}\|^2&=[\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}]=[\vec{x},\vec{x}+\vec{y}]+[\vec{y},\vec{x}+\vec{y}]\\&=[\vec{x}+\vec{y},\vec{x}]+[\vec{x}+\vec{y},\vec{y}]=[\vec{x},\vec{x}]+[\vec{y},\vec{x}]+[\vec{x},\vec{y}]+[\vec{y},\vec{y}]\\&=[\vec{x},\vec{x}]+2[\vec{x},\vec{y}]+[\vec{y},\vec{y}]\end{aligned}$$

由施瓦茨不等式，得 $[\vec{x},\vec{y}]\leq\sqrt{[\vec{x},\vec{x}][\vec{y},\vec{y}]}$

则 $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 \leqslant [\vec{x},\vec{x}] + 2\sqrt{[\vec{x},\vec{x}][\vec{y},\vec{y}]} + [\vec{y},\vec{y}]$

$= \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 = (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2$

$\therefore \|\vec{x}+\vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

由施瓦茨不等式，$|[\vec{x},\vec{y}]| \leqslant \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$ 则 $\left|\dfrac{[\vec{x},\vec{y}]}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|}\right| \leqslant 1$ （当 $\|\vec{x}\|\|\vec{y}\| \neq 0$ 时）

当 $\vec{x}\neq 0, \vec{y}\neq 0$ 时，$\arccos\dfrac{[\vec{x},\vec{y}]}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|} = \theta$ 称为 n 维向量 $\vec{x}$ 与 $\vec{y}$ 的夹角。

当 $[\vec{x},\vec{y}]=0$ 时，称向量 $\vec{x}$ 与 $\vec{y}$ 正交。

当 $\vec{x}=0$ 时，$\vec{x}$ 与任何向量都正交。

正交向量组是指一组两两正交的非零向量。

定理1：若 n 维向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_r$ 是一组两两正交的非零向量，则 $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r$ 线性无关。

证明：设有 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 使 $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_r\vec{a}_r = 0$

以 $\vec{a}_1^T$ 左乘上式两端，得 $\lambda_1\vec{a}_1^T\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_1^T\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_r\vec{a}_1^T\vec{a}_r = 0$

$\because \vec{a}_1, \vec{a}_2 \cdots, \vec{a}_r$ 是一组两两正交的非零向量。 $\therefore \lambda_1\vec{a}_1^T\vec{a}_1 = 0$

又 $\because \vec{a}_1 \neq 0$ $\therefore \vec{a}_1^T\vec{a}_1 = \|\vec{a}_1\|^2 \neq 0$ 则 $\lambda_1 = 0$

同理 $\lambda_2 = 0, \cdots, \lambda_r = 0$

$\therefore$ 向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 线性无关。

例1. 已知3维向量空间 R^3 中两个向量

$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，$\vec{a}_2 = \begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$ 正交，试求一个非零向量 $\vec{a}_3$，使 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ 两两正交。

解：$A = \begin{bmatrix}\vec{a}_1^T\\ \vec{a}_2^T\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$ 设 $\vec{a}_3 = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$.

则 $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，即 $Ax=0$

$A \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -3 & 0\end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ 得 $\begin{cases}x_1 = -x_3\\ x_2 = 0\end{cases}$

基础解系 $\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$. $\therefore$ 取 $\vec{a}_3 = \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$.

定义3：设n维向量$\hat{e}_1, \hat{e}_2, \cdots, \hat{e}_r$是向量空间$V$的一个基，如果$\hat{e}_1, \cdots, \hat{e}_r$两两正交，且都是单位向量，则称$\hat{e}_1, \cdots, \hat{e}_r$是$V$的一个规范正交基。

若$\hat{e}_1, \cdots, \hat{e}_r$是$V$的一个规范正交基，那么$V$中任一向量$\vec{a}$能由$\hat{e}_1, \cdots, \hat{e}_r$线性表示

设表示式为：$\vec{a} = \lambda_1\hat{e}_1 + \lambda_2\hat{e}_2 + \cdots + \lambda_r\hat{e}_r$

用$\hat{e}_i^T$左乘上式两端，$\hat{e}_i^T\vec{a} = \lambda_i\hat{e}_i^T\hat{e}_i = \lambda_i$

即 $\lambda_i = \hat{e}_i^T\vec{a} = [\vec{a}, \hat{e}_i]$ 向量在规范正交基中的坐标计算公式。

设$\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r$是向量空间$V$的一个基，求$V$的一个规范正交基。这样一个问题，称为把$\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r$这个基规范正交化。

取 $\vec{b}_1 = \vec{a}_1$

$$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \frac{[\vec{b}_1, \vec{a}_2]}{[\vec{b}_1, \vec{b}_1]}\vec{b}_1$$

$$\cdots\cdots$$

$$\vec{b}_r = \vec{a}_r - \frac{[\vec{b}_1, \vec{a}_r]}{[\vec{b}_1, \vec{b}_1]}\vec{b}_1 - \frac{[\vec{b}_2, \vec{a}_r]}{[\vec{b}_2, \vec{b}_2]}\vec{b}_2 - \cdots - \frac{[\vec{b}_{r-1}, \vec{a}_r]}{[\vec{b}_{r-1}, \vec{b}_{r-1}]}\vec{b}_{r-1}$$

$\vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_r$两两正交，且$\vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_r$与$\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r$等价。

再单位化，即 $\hat{e}_1 = \frac{1}{\|\vec{b}_1\|}\vec{b}_1$，$\hat{e}_2 = \frac{1}{\|\vec{b}_2\|}\vec{b}_2$，$\cdots$，$\hat{e}_r = \frac{1}{\|\vec{b}_r\|}\vec{b}_r$ 就是V的一个规范正交基。

上述从线性无关向量组$\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r$导出正交向量组$\vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_r$的过程称为施密特正交化过程。

例2. 设$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$，$\vec{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$，试用施密特正交化过程把这组向量规范正交化。

解：取 $\vec{b}_1 = \vec{a}_1$

$$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \frac{[\vec{b}_1, \vec{a}_2]}{[\vec{b}_1, \vec{b}_1]}\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{4}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{5}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b}_3 = \vec{a}_3 - \frac{[\vec{b}_1, \vec{a}_3]}{[\vec{b}_1, \vec{b}_1]}\vec{b}_1 - \frac{[\vec{b}_2, \vec{a}_3]}{[\vec{b}_2, \vec{b}_2]}\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{5}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

再单位化，得

$$\hat{e}_1 = \frac{\vec{b}_1}{\|\vec{b}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \hat{e}_2 = \frac{\vec{b}_2}{\|\vec{b}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{e}_3 = \frac{\vec{b}_3}{\|\vec{b}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

例3. 已知 $\vec{a}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，求一组非零向量 $\vec{a}_2,\vec{a}_3$，使 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 两两正交。

解：$\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 满足方程 $\vec{a}_1^T x=0$，即 $x_1+x_2+x_3=0$

则它的基础解系为：$\vec{\xi}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$，$\vec{\xi}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$

将它们正交化，即

$$\vec{a}_2=\vec{\xi}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\quad \vec{a}_3=\vec{\xi}_2-\frac{[\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2]}{[\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_1]}\vec{\xi}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix}.$$

定义4：如果 n 阶矩阵 A 满足 $A^TA=E$（即 $A^{-1}=A^T$），那么称 A 为正交矩阵，简称正交阵。

列向量

设 $A=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n)$ 则

$$A^TA=\begin{bmatrix}\vec{a}_1^T\\\vec{a}_2^T\\\vdots\\\vec{a}_n^T\end{bmatrix}(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n)=\begin{bmatrix}\vec{a}_1^T\vec{a}_1 & \vec{a}_1^T\vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_1^T\vec{a}_n\\\vec{a}_2^T\vec{a}_1 & \vec{a}_2^T\vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_2^T\vec{a}_n\\\vdots & \vdots & & \vdots\\\vec{a}_n^T\vec{a}_1 & \vec{a}_n^T\vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n^T\vec{a}_n\end{bmatrix}=E$$

则 $(\vec{a}_i^T\vec{a}_j)=(\delta_{ij})\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$

方阵 A 为正交阵的充分必要条件是 A 的列向量都是单位向量，且两两正交。

$\because A^TA=E$ 与 $AA^T=E$ 等价，$\therefore$ 上述结论对 A 的行向量也成立。

例4. 验证矩阵

$$P=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0\\0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$ 是正交阵。

证：$\because$ P 的每个列向量都是单位向量，且两两正交。

$\therefore$ P 是正交阵。

正交矩阵的性质：

i 若 A 为正交阵，则 $A^{-1}=A^T$ 也是正交阵，且 $|A|=1$ 或 (-1)。

ii 若 A 和 B 都是正交阵，则 AB 也是正交阵。

定义5：若 P 为正交矩阵，则线性变换 $\vec{y}=P\vec{x}$ 称为正交变换。

设 $\vec{y}=P\vec{x}$ 为正交变换，则 $\|\vec{y}\|=\sqrt{\vec{y}^T\vec{y}}=\sqrt{\vec{x}^TP^TP\vec{x}}=\sqrt{\vec{x}^T\vec{x}}=\|\vec{x}\|$.

说明经正交变换向量长度保持不变。

§2. 方阵的特征值与特征向量

定义1：设A是n阶矩阵，如果数λ和n维非零列向量$\vec{x}$使关系式

$$A\vec{x}=\lambda\vec{x} \qquad (1)$$

成立，那么，这样的数λ称为方阵A的特征值，非零向量$\vec{x}$称为A的对应于特征值λ的特征向量。

(1)式可写为：$(A-\lambda E)\vec{x}=0 \qquad (2)$

(2)式是含n个未知数n个方程的齐次线性方程组。

该方程组有非零解的充分必要条件是系数行列式$|A-\lambda E|=0$. $\quad(3)$

即
$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

(3)式是以λ为未知数的一元n次方程，称为方阵A的特征方程。

(3)式左端$|A-\lambda E|$是λ的n次多项式，记为$f(\lambda)$，称为方阵A的特征多项式。

A的特征值就是特征方程的解。n阶矩阵A在复数范围内有n个特征值。

设n阶矩阵$A=(a_{ij})$的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则

i) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$

ii) $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$.

设$\lambda=\lambda_i$是方阵A的一个特征值，则由方程

$$(A-\lambda_i E)\vec{x}=0$$

可求得非零解$\vec{x}=\vec{p}_i$，则$\vec{p}_i$就是方阵A的对应于特征值λ_i的特征向量。

例1. 求矩阵$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$的特征值和特征向量。

解. A的特征方程$|A-\lambda E|=0$.

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda & -1\\ -1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)^2-1=8-6\lambda+\lambda^2=(4-\lambda)(2-\lambda)=0$$

$\therefore$ A的特征值$\lambda_1=4$，$\lambda_2=2$.

当$\lambda_1=4$时，$(A-4E)\vec{x}=0$

$$\begin{bmatrix}3-4 & -1\\ -1 & 3-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\qquad \begin{cases}-x_1-x_2=0\\ -x_1-x_2=0\end{cases}\qquad 得\quad x_1=-x_2$$

则对应的特征向量 $\vec{p}_1=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ $k\vec{p}_1(k\neq 0)$也是对应于$\lambda_1=4$的特征向量。

当$\lambda_2=2$时，$(A-2E)\vec{x}=0$

$$\begin{bmatrix}3-2 & -1\\ -1 & 3-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\qquad \begin{cases}x_1-x_2=0\\ -x_1+x_2=0\end{cases}\qquad 得\quad x_1=x_2$$

则对应的特征向量 $\vec{p}_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$. $k\vec{p}_2(k\neq 0)$也是对应于$\lambda_2=2$的特征向量.

例2. 求矩阵$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$的特征值和特征向量.

解: A的特征方程$|A-\lambda E|=0$.

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 1 & 0\\ -4 & 3-\lambda & 0\\ 1 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(1-\lambda)^2=0$$

$\therefore$ A的特征值 $\lambda_1=2$, $\lambda_2=\lambda_3=1$.

当$\lambda_1=2$时，解方程$(A-2E)\vec{x}=0$

$$A-2E=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 0\\ -4 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\qquad \begin{cases}x_1=0\\ x_2=0\end{cases}$$

得基础解系 $\vec{p}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

$\therefore$ $k\vec{p}_1(k\neq 0)$是对应于$\lambda_1=2$的全部特征向量.

当$\lambda_2=\lambda_3=1$时，解方程$(A-E)\vec{x}=0$.

$$A-E=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ -4 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\qquad \begin{cases}x_1=-x_3\\ x_2=-2x_3\end{cases}$$

得基础解系 $\vec{p}_2=\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\end{bmatrix}$

$\therefore$ $k\vec{p}_2(k\neq 0)$是对应于$\lambda_2=\lambda_3=1$的全部特征向量。

例3. 求矩阵 $A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & 1 & 3\end{bmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解: $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1 & 1\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ -4 & 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1\\ -4 & 3-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)(\lambda-2)^2$

$\therefore$ A的特征值为 $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=\lambda_3=2$.

当 $\lambda_1=-1$ 时, 解方程 $(A+E)\vec{x}=0$.

$$(A+E)=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ -4 & 1 & 4\end{bmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & -3 & 0\end{bmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$\begin{cases}x_1=x_3\\ x_2=0\end{cases}$ 得基础解系 $\vec{p}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$

$\therefore$ $k\vec{p}_1\ (k\neq 0)$ 是对应于 $\lambda_1=-1$ 的全部特征向量.

当 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 时, 解方程 $(A-2E)\vec{x}=0$.

$$A-2E=\begin{bmatrix}-4 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -4 & 1 & 1\end{bmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{bmatrix}-4 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\qquad -4x_1+x_2+x_3=0$$

得基础解系 $\vec{p}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$, $\vec{p}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\4\end{bmatrix}$

$\therefore$ $k_2\vec{p}_2+k_3\vec{p}_3$ (k_2, k_3 不同时为0) 是对应于 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的全部特征向量.

例4. 设 λ 是方阵A的特征值, 证明

(1) λ^2 是 A^2 的特征值;

(2) 当A可逆时, $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值.

证明: $\because$ λ 是方阵A的特征值. $\therefore$ 有 $\vec{p}\neq 0$ 使 $A\vec{p}=\lambda\vec{p}$.

(1) $A^2\vec{p}=A(A\vec{p})=A(\lambda\vec{p})=\lambda(A\vec{p})=\lambda^2\vec{p}$

$\therefore$ λ^2 是 A^2 的特征值.

(2) $\because$ A可逆, 且 $A\vec{p}=\lambda\vec{p}$. $\therefore$ $\vec{p}=\lambda A^{-1}\vec{p}$

又 $\because$ $\vec{p}\neq 0$ $\therefore$ $\lambda\neq 0$ 则 $A^{-1}\vec{p}=\frac{1}{\lambda}\vec{p}$

$\therefore$ $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值.

结论：若λ是A的特征值，则

i λ^k是A^k的特征值.

ii $\varphi(\lambda)$是$\varphi(A)$的特征值.（$\varphi(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_m\lambda^m$是$\lambda$的多项式，

$\varphi(A)=a_0E+a_1A+\cdots+a_mA^m$是矩阵$A$的多项式）.

例5. 设3阶矩阵A的特征值为$1,-1,2$；求$|A^*+3A-2E|$.

解：$\because$ A的特征值全不为0.　$\therefore$ A可逆.

则 $A^*=|A|A^{-1}$，　$|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-2$

$\varphi(A)=A^*+3A-2E=-2A^{-1}+3A-2E$

则 $\varphi(\lambda)=-2\frac{1}{\lambda}+3\lambda-2$

$\therefore$ $\varphi(A)$的特征值为$\varphi(1)=-1$，$\varphi(-1)=-3$，$\varphi(2)=3$.

$\therefore$ $|A^*+3A-2E|=(-1)\cdot(-3)\cdot3=9$.

定理2：设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$是方阵$A$的$m$个特征值，$\vec{p}_1,\vec{p}_2,\cdots,\vec{p}_m$依次是与之对应的特征向量，如果$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$各不相等，则$\vec{p}_1,\vec{p}_2,\cdots,\vec{p}_m$线性无关.

证明：设有常数$k_1,k_2,\cdots,k_m$使 $k_1\vec{p}_1+k_2\vec{p}_2+\cdots+k_m\vec{p}_m=0$　①

$A(k_1\vec{p}_1+k_2\vec{p}_2+\cdots+k_m\vec{p}_m)=0$

$\lambda_1k_1\vec{p}_1+\lambda_2k_2\vec{p}_2+\cdots+\lambda_mk_m\vec{p}_m=0$　②

$A(\lambda_1k_1\vec{p}_1+\lambda_2k_2\vec{p}_2+\cdots+\lambda_mk_m\vec{p}_m)=0$

$\lambda_1^2k_1\vec{p}_1+\lambda_2^2k_2\vec{p}_2+\cdots+\lambda_m^2k_m\vec{p}_m=0$　③

类推之，得 $\lambda_1^kk_1\vec{p}_1+\lambda_2^kk_2\vec{p}_2+\cdots+\lambda_m^kk_m\vec{p}_m=0$　$(k=1,2,\cdots,m-1)$　ⓜ

将①，②，…ⓜ各式合写成矩阵形式，得

$$(k_1\vec{p}_1,\ k_2\vec{p}_2,\ \cdots,\ k_m\vec{p}_m)\begin{bmatrix}1&\lambda_1&\cdots&\lambda_1^{m-1}\\1&\lambda_2&\cdots&\lambda_2^{m-1}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&\lambda_m&\cdots&\lambda_m^{m-1}\end{bmatrix}=(0,0,\cdots,0)$$

$\because$ λ_i各不相等.　$\therefore$ 范德蒙德行列式不等于0，则对应的矩阵可逆.

则 $(k_1\vec{p}_1,k_2\vec{p}_2,\cdots,k_m\vec{p}_m)=(0,0,\cdots,0)$

即 $k_j\vec{p}_j=0$　$(j=1,2,\cdots,m)$　$\because$ $\vec{p}_j\neq0$　$\therefore$ $k_j=0$　$(j=1,2,\cdots,m)$

$\therefore$ 向量组$\vec{p}_1,\vec{p}_2,\cdots,\vec{p}_m$线性无关.

例6. 设λ_1和λ_2是矩阵A的两个不同的特征值，对应的特征向量依次为$\vec{p}_1$和$\vec{p}_2$，证明$\vec{p}_1+\vec{p}_2$不是A的特征向量。

证明：$A\vec{p}_1=\lambda_1\vec{p}_1$， $A\vec{p}_2=\lambda_2\vec{p}_2$

则 $A(\vec{p}_1+\vec{p}_2)=\lambda_1\vec{p}_1+\lambda_2\vec{p}_2$

反证法，假设$\vec{p}_1+\vec{p}_2$是A的特征向量，则 $A(\vec{p}_1+\vec{p}_2)=\lambda(\vec{p}_1+\vec{p}_2)$

$$\lambda(\vec{p}_1+\vec{p}_2)=\lambda_1\vec{p}_1+\lambda_2\vec{p}_2$$

即 $(\lambda-\lambda_1)\vec{p}_1+(\lambda-\lambda_2)\vec{p}_2=0$

$\because \lambda_1\neq\lambda_2$ $\therefore \vec{p}_1$、$\vec{p}_2$线性无关。

则 $\lambda-\lambda_1=\lambda-\lambda_2=0$ 即 $\lambda_1=\lambda_2$ （与题设矛盾）

$\therefore$ $\vec{p}_1+\vec{p}_2$不是A的特征向量。

§3. 相似矩阵

定义1：设A，B都是n阶矩阵，若有可逆矩阵P，使$P^{-1}AP=B$，则称B是A的相似矩阵，或说矩阵A与B相似。

对A进行运算$P^{-1}AP$称为对A进行相似变换。

可逆矩阵P称为把A变成B的相似变换矩阵。

定理1：若n阶矩阵A与B相似，则A与B的特征多项式相同，从而A与B的特征值也相同。

证明：$\because$ A与B相似． $\therefore P^{-1}AP=B$

则 $|B-\lambda E|=|P^{-1}AP-P^{-1}(\lambda E)P|=|P^{-1}(A-\lambda E)P|=|P^{-1}||A-\lambda E||P|$

$=|P^{-1}||P||A-\lambda E|=|P^{-1}P||A-\lambda E|=|A-\lambda E|$

推论：若n阶矩阵A与对角阵 $\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$ 相似，则$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$即是A的n个特征值。

证明：$\because \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$\Lambda$的n个特征值．

$\therefore \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$也就是A的n个特征值。

若 $A=PBP^{-1}$，则 $A^k=PB^kP^{-1}$，A的多项式 $\varphi(A)=P\varphi(B)P^{-1}$

若有可逆矩阵P使 $P^{-1}AP=\Lambda$ 为对角阵，则 $A^k=P\Lambda^kP^{-1}$，$\varphi(A)=P\varphi(\Lambda)P^{-1}$.

对于对角阵：

$$\Lambda^k=\begin{bmatrix}\lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k\end{bmatrix},\quad \varphi(\Lambda)=\begin{bmatrix}\varphi(\lambda_1) & & & \\ & \varphi(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi(\lambda_n)\end{bmatrix}$$

结论：设 $f(\lambda)$ 是矩阵A的特征多项式，则 $f(A)=0$.

证明：如果A与对角阵相似，则 $P^{-1}AP=\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$

$\because \lambda_i$ 为A的特征值，则A的特征方程 $f(\lambda_i)=0$

$$A=P\Lambda P^{-1}\quad 则\quad f(A)=Pf(\Lambda)P^{-1}=P\begin{bmatrix}f(\lambda_1) & & & \\ & f(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\lambda_n)\end{bmatrix}P^{-1}=POP^{-1}=0.$$

对n阶矩阵A，寻求相似变换矩阵P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$ 为对角阵，称为把方阵A对角化。

设有可逆矩阵P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$ 为对角阵，讨论P应满足的关系。

设 $P=(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\cdots,\vec{p}_n)$（列向量）. 由 $P^{-1}AP=\Lambda$，得 $AP=P\Lambda$.

即 $$A(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\cdots,\vec{p}_n)=(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\cdots,\vec{p}_n)\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}=(\lambda_1\vec{p}_1,\lambda_2\vec{p}_2,\cdots,\lambda_n\vec{p}_n)$$

$$A\vec{p}_i=\lambda_i\vec{p}_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

$\therefore \lambda_i$ 是A的特征值，P的列向量 $\vec{p}_i$ 就是A的对应于特征值 λ_i 的特征向量。

A恰好有n个特征值，并可求得对应的n个特征向量，这n个特征向量即可构成矩阵P，使 $AP=P\Lambda$。如果P可逆，则 $P^{-1}AP=\Lambda$，即A与对角阵相似。

P可逆，即矩阵P的列向量 $\vec{p}_1,\vec{p}_2,\cdots,\vec{p}_n$ 线性无关。

定理2：n阶矩阵A与对角阵相似（即A能对角化）的充分必要条件是A有n个线性无关的特征向量。

推论：如果n阶矩阵A的n个特征值互不相等，则A与对角阵相似。

例：设 $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & x\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$，问x为何值时，矩阵A能对角化？

解：$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & x \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda+1)$

$\therefore\ \lambda_1=-1,\ \lambda_2=\lambda_3=1.$

$\because$ $\lambda_1=-1$时，可求得线性无关的特征向量恰有1个。

$\therefore$ 矩阵A可对角化的充要条件是 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的重根对应有2个线性无关的特征向量。

即 方程 $(A-E)x=0$ 有2个线性无关的解，则 $R(A-E)=1$.

$$A-E = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\because\ R(A-E)=1 \quad \therefore\ x+1=0$ 即 $x=-1$.

$\therefore$ 当 $x=-1$ 时，矩阵A能对角化。

§4. 对称矩阵的对角化.

定理1：对称阵的特征值为实数。

证明：设复数λ为对称阵A的特征值，复向量x为对应的特征向量，

即 $Ax=\lambda x,\ x\neq 0$.

$\bar\lambda$为λ的共轭复数，$\bar x$为x的共轭复向量；A为实矩阵，则 $\bar A = A$.

$A\bar x = \bar A\bar x = \overline{(Ax)} = \overline{(\lambda x)} = \bar\lambda\bar x$

则 $\bar x^TAx = \bar x^T(Ax) = \bar x^T\lambda x = \lambda\bar x^Tx$

$\bar x^TAx = (\bar x^TA^T)x = (A\bar x)^Tx = (\bar\lambda\bar x)^Tx = \bar\lambda\bar x^Tx$

得 $(\lambda-\bar\lambda)\bar x^Tx = 0$

$\because\ x\neq 0 \quad \therefore\ \bar x^Tx = \sum_{i=1}^n \bar x_ix_i = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \neq 0$

$\therefore\ \lambda-\bar\lambda=0$ 即 $\lambda=\bar\lambda$，λ为实数。

定理2：设λ_1,λ_2是对称阵A的两个特征值，p_1,p_2是对应的特征向量。若$\lambda_1\neq\lambda_2$，则 p_1与p_2正交。

证：$\lambda_1 p_1 = Ap_1$，$\lambda_2 p_2 = Ap_2$ 且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

$\because$ A是对称阵.

$\therefore \lambda_1 p_1^T = (\lambda_1 p_1)^T = (Ap_1)^T = p_1^T A^T = p_1^T A$

上式两边右乘 p_2，得 $\lambda_1 p_1^T p_2 = p_1^T A p_2 = p_1^T(\lambda_2 p_2) = \lambda_2 p_1^T p_2$

则 $(\lambda_1 - \lambda_2) p_1^T p_2 = 0$

$\because \lambda_1 \neq \lambda_2$ $\therefore p_1^T p_2 = 0$ 则 p_1 与 p_2 正交.

定理3：设A为n阶对称阵，则必有正交阵P，使 $P^{-1}AP = P^TAP = \Lambda$，其中 Λ 是以A的n个特征值为对角元的对角阵.

推论：设A为n阶对称阵，λ 是A的特征方程的k重根，则矩阵 $A-\lambda E$ 的秩 $R(A-\lambda E) = n-k$，从而对应特征值 λ 恰有k个线性无关的特征向量.

证明：$\because$ 对称阵A与对角阵 Λ 相似.

$\therefore A-\lambda E$ 与 $\Lambda - \lambda E = \begin{bmatrix} \lambda_1-\lambda & & & \\ & \lambda_2-\lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n-\lambda \end{bmatrix}$ 相似.

$\because$ 当 λ 是A的k重特征根时，$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 这n个特征值中有k个等于 λ.

$$\therefore \Lambda - \lambda E = \begin{bmatrix} \lambda_1-\lambda & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_{n-k}-\lambda & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第} n-k \text{行} \\ \\ \\ \leftarrow \text{第} n \text{行} \end{array}$$

则 $R(\Lambda - \lambda E) = n-k$

$\because R(A-\lambda E) = R(\Lambda - \lambda E)$

$\therefore R(A-\lambda E) = n-k$

$\therefore$ 方程 $(A-\lambda E)x = 0$ 对应有 $n-(n-k) = k$ 个线性无关的基础解系的解向量

例1：设 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，求一个正交阵P，使 $P^{-1}AP = \Lambda$ 为对角阵.

解：$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 - r_2} \begin{vmatrix} 1-\lambda & \lambda-1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \xlongequal{c_2 + c_1} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda)(\lambda^2+\lambda-2) = -(\lambda-1)^2(\lambda+2) = 0$

$\therefore$ A的特征值 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$.

当 $\lambda_1=-2$ 时，解方程 $(A+2E)x=0$

$$(A+2E)=\begin{bmatrix}2&-1&1\\-1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}\overset{r_2+r_1}{\sim}\begin{bmatrix}2&-1&1\\1&1&2\\1&1&2\end{bmatrix}\underset{r_2-\frac{1}{2}r_1}{\overset{r_3-r_2}{\sim}}\begin{bmatrix}2&-1&1\\0&\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\\0&0&0\end{bmatrix}\underset{\substack{r_1+r_2\\ r_1\times\frac{1}{2}}}{\overset{r_2\times\frac{2}{3}}{\sim}}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得基础解系 $\xi_1=\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$ 将 ξ_1 单位化，得 $p_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$.

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，解方程 $(A-E)x=0$

$$A-E=\begin{bmatrix}-1&-1&1\\-1&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad x_1=-x_2+x_3$$

得基础解系 $\xi_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$，$\xi_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$

将 ξ_2 和 ξ_3 正交化：取 $\eta_2=\xi_2$

$$\eta_3=\xi_3-\frac{[\eta_2,\xi_3]}{[\eta_2,\eta_2]}\eta_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$$

再将 η_2 和 η_3 单位化，得 $p_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$，$p_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$

则正交阵 $P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$

$$P^{-1}AP=P^TAP=\Lambda=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

例2. 设 $A=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$，求 A^n.

解：$\because$ A为对称阵.

$\therefore$ A可对角化，即有可逆矩阵P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$.

则 $A=P\Lambda P^{-1}$ 有 $A^n=P\Lambda^nP^{-1}$.

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1\\ -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda+3=(\lambda-1)(\lambda-3)=0$$

则 A的特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=3$.

得 $\Lambda=\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}$，$\Lambda^n=\begin{bmatrix}1&0\\0&3^n\end{bmatrix}$

当$\lambda_1=1$时，$A-E=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\end{bmatrix}$，得 $\xi_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

当$\lambda_2=3$时，$A-3E=\begin{bmatrix}-1&-1\\-1&-1\end{bmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$，得 $\xi_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

则有 $P=(\xi_1,\xi_2)=\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}$，$P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}$

$$\therefore A^n=P\Lambda^nP^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&3^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&3^n\\1&-3^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1+3^n&1-3^n\\1-3^n&1+3^n\end{bmatrix}$$

§5 二次型及其标准形

二次曲线 $\underbrace{ax^2+bxy+cy^2}_{\text{二次齐次多项式}}=1$ (1)

选适当的坐标旋转变换 $\begin{cases}x=x'\cos\theta-y'\sin\theta\\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta\end{cases}$

把(1)化为标准形 $mx'^2+ny'^2=1$

(1)式左边是一个二次齐次多项式，化标准形的过程就是通过变量的线性变换化简一个二次齐次多项式，使它只含有平方项。

讨论n个变量的二次齐次多项式的化简问题。

定义1：含有n个变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$的二次齐次函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \quad (2)$$

称为二次型。

取 $a_{ij}=a_{ji}$，则 $2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ij}x_jx_i$，则(2)式写为

$$\begin{aligned}f=&a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n\\&+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n\\&+\cdots+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \quad (3)\end{aligned}$$

寻求可逆的线性变换：
$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases} \quad (4)$$

使二次型只含平方项，即将(4)代入(2)，使

$$f = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_n y_n^2$$

这种只含平方项的二次型，称为二次型的标准形。

若标准形的系数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 只在 1，-1，0 三个数中取值，即

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2$$ 称为二次型的规范形。

当 a_{ij} 为复数时，f 称为复二次型；当 a_{ij} 为实数时，f 称为实二次型。

由(3)式，利用矩阵，二次型可表示为：

$$\begin{aligned} f &= x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) \\ &\quad + x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n) \\ &\quad + \cdots + x_n(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n) \\ &= (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix} \\ &= (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= x^T A x \qquad (5) \end{aligned}$$

$\because a_{ij} = a_{ji}$ $\quad\therefore$ A 为对称阵.

例：二次型 $f = x^2 - 3z^2 - 4xy + yz$ 用矩阵记号表示为

$$f = (x, y, z)\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

可见，任给一个二次型，就惟一地确定一个对称阵；反之，任给一个对称阵，也可惟一地确定一个二次型。二次型与对称阵之间存在一一对应的关系。

因此，对称阵A叫做二次型f的矩阵，把f叫做对称阵A的二次型。

对称阵A的秩就叫做二次型f的秩。

矩阵$C=(c_{ij})$，则可逆变换（4）记作 $x=Cy$ 代入（5），得

$$f=x^TAx=(Cy)^TACy=y^T(C^TAC)y$$

定义2：设A和B是n阶矩阵，若有可逆矩阵C，使$B=C^TAC$，则称矩阵A与B合同。

若A为对称阵，则$B=C^TAC$也为对称阵，且$R(B)=R(A)$。

证：$\because B^T=(C^TAC)^T=C^TA^TC=C^TAC=B$

$\therefore$ B为对称阵。

又$\because$ $B=C^TAC$，C可逆，则C^T也可逆。

$\therefore$ $R(B)=R(A)$。

可知，经可逆变换$x=Cy$后，二次型f的矩阵由A变成与A合同的矩阵C^TAC，且二次型的秩不变。

要使二次型f经可逆变换$x=Cy$变成标准形，就是

$$f=x^TAx=y^T(C^TAC)y=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2$$

$$=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\begin{bmatrix}k_1&&&\\&k_2&&\\&&\ddots&\\&&&k_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}=y^T\Lambda y$$

也就是要使C^TAC成为对角阵Λ。

主要问题是：对于对称阵A，寻求可逆矩阵C，使得C^TAC为对角阵。

对于任意对称阵A，总有正交阵P，使$P^{-1}AP=P^TAP=\Lambda$。

定理1：任给二次型$f=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\ (a_{ij}=a_{ji})$，总有正交变换$x=Py$，使$f$化为标准形$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$，其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$f$的矩阵$A=(a_{ij})$的特征值。

推论：任给n元二次型$f(x)=x^TAx\ (A^T=A)$，总有可逆变换$x=Cz$，使$f(Cz)$为规范形。

证明：按定理1，有 $f(Py)=y^T\Lambda y=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$

设二次型f的秩为r，则特征值λ_i中有r个不为0，设$\lambda_1,\cdots,\lambda_r$不等于0.

令
$$K=\begin{bmatrix}k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n\end{bmatrix}，其中\ k_i=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}}, & i\le r\\ 1, & i>r\end{cases}$$

则K可逆，变换$y=Kz$把$f(Py)$化为
$$f(PKz)=z^TK^TP^TAPKz=z^TK^T\Lambda Kz$$
$$K^T\Lambda K=\mathrm{diag}\left(\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|},\cdots,\frac{\lambda_r}{|\lambda_r|},0,\cdots,0\right)$$

记$C=PK$，则$x=Py=PKz=Cz$，即可逆变换$x=Cz$把f化成规范形
$$f(Cz)=\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|}z_1^2+\cdots+\frac{\lambda_r}{|\lambda_r|}z_r^2$$

例：求一个正交变换$x=Py$，把二次形
$$f=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$$化为标准形。

解：二次型的矩阵为
$$A=\begin{bmatrix}0&1&1&-1\\1&0&-1&1\\1&-1&0&1\\-1&1&1&0\end{bmatrix}$$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda&1&1&-1\\1&-\lambda&-1&1\\1&-1&-\lambda&1\\-1&1&1&-\lambda\end{vmatrix}\overset{c_1+c_2+c_3+c_4}{=}(-\lambda+1)\begin{vmatrix}1&1&1&-1\\1&-\lambda&-1&1\\1&-1&-\lambda&1\\1&1&1&-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-r_1]{r_2-r_1,\ r_3-r_1}\begin{vmatrix}1&1&1&-1\\0&-\lambda-1&-2&2\\0&-2&-\lambda-1&2\\0&0&0&-\lambda+1\end{vmatrix}(-\lambda+1)=(-\lambda+1)\begin{vmatrix}-\lambda-1&-2&2\\-2&-\lambda-1&2\\0&0&-\lambda+1\end{vmatrix}$$

$$=(-\lambda+1)^2\begin{vmatrix}-\lambda-1&-2\\-2&-\lambda-1\end{vmatrix}=(-\lambda+1)^2(\lambda^2+2\lambda-3)=(\lambda+3)(\lambda-1)^3$$

$\therefore$ A的特征值为$\lambda_1=-3$，$\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$.

当$\lambda_1=-3$时，解方程$(A+3E)x=0$

$$A+3E=\begin{bmatrix}3&1&1&-1\\1&3&-1&1\\1&-1&3&1\\-1&1&1&3\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1\times\frac{1}{4}]{r_1+r_2+r_3+r_4}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&3&-1&1\\1&-1&3&1\\-1&1&1&3\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-r_1\\r_2-r_1}]{r_4+r_1}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&2&-2&0\\0&-2&2&0\\0&2&2&4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_4]{r_3+r_2}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&2&-2&0\\0&+2&2&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2\times\frac{1}{2}\\r_3\times\frac{1}{4}}]{r_3+r_2}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\qquad\xrightarrow[\substack{r_3+r_2\\r_2\times\frac{1}{2}}]{r_4+r_3}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\\0&0&4&4\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_4]{r_4\times\frac{1}{4}}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1-r_2-2r_3}\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\qquad\begin{cases}x_1=x_4\\x_2=-x_4\\x_3=-x_4\end{cases}\qquad 基础解系\ \xi_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}\qquad 单位化得\ p_1=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}.$$

当$\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$时，解方程$(A-E)x=0$.

$$A-E=\begin{bmatrix}-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2+r_1]{\substack{r_4+r_3\\r_3-r_2}}\begin{bmatrix}-1&1&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\qquad -x_1+x_2+x_3-x_4=0$$

基础解系 $\xi_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$，$\xi_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}$，$\xi_4=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$

单位化得 $p_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$，$p_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}$，$p_4=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$

则正交变换为

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}$$

$\therefore f=-3y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2$

要把二次型f化成规范形，令 $\begin{cases} y_1=\frac{1}{\sqrt{3}}z_1 \\ y_2=z_2 \\ y_3=z_3 \\ y_4=z_4 \end{cases}$

得 $f=-z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2$.

§6. 用配方法化二次型成标准形.

用拉格朗日配方法把二次型化成标准形.

例1. 化二次型 $f=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$ 成标准形，并求所用的变换矩阵.

解：f中含变量x_1的平方项，故把x_1的项归并起来，配方可得

$$\begin{aligned} f&=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+5x_3^2+6x_2x_3 \\ &=(x_1+x_2+x_3)^2-x_2^2-x_3^2-2x_2x_3+2x_2^2+5x_3^2+6x_2x_3 \\ &=(x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+4x_3^2+4x_2x_3 \\ &=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+2x_3)^2 \end{aligned}$$

令 $\begin{cases} y_1=x_1+x_2+x_3 \\ y_2=x_2+2x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x_1=y_1-y_2+y_3 \\ x_2=y_2-2y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases}$

则 f化成标准形 $f=y_1^2+y_2^2$，所用变换矩阵为

$$C=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}，\ (|C|=1\neq 0)$$

例2. 化二次型 $f=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$ 成规范形，并求所用的变换矩阵.

解：f中不含平方项，由于含有x_1x_2乘积项，故

令 $\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases}$ 代入二次型，得

$$\begin{aligned} f&=2y_1^2-2y_2^2+2y_1y_3+2y_2y_3-6y_1y_3+6y_2y_3 \\ &=2y_1^2-2y_2^2-4y_1y_3+8y_2y_3 \end{aligned}$$

再配方，$f=2y_1^2-4y_1y_3-2y_2^2+8y_2y_3$

$$=2(y_1-y_3)^2-2y_3^2-2y_2^2+8y_2y_3=2(y_1-y_3)^2-2(y_2-2y_3)^2+6y_3^2$$

令 $\begin{cases} z_1=\sqrt{2}(y_1-y_3) \\ z_2=\sqrt{2}(y_2-2y_3) \\ z_3=\sqrt{6}\,y_3 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} y_1=\frac{1}{\sqrt{2}}z_1+\frac{1}{\sqrt{6}}z_3 \\ y_2=\frac{1}{\sqrt{2}}z_2+\frac{2}{\sqrt{6}}z_3 \\ y_3=\frac{1}{\sqrt{6}}z_3 \end{cases}$

将 f 化成规范形：$f=z_1^2-z_2^2+z_3^2$

所用变换矩阵为：

$$C=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\\0&0&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{3}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&0&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix},\quad \left(|C|=-\frac{1}{\sqrt{6}}\neq 0\right)$$

§7. 正定二次型

二次型的标准形不是惟一的，但标准形中所含项数是确定的，就是二次型的秩。并且在变换为实变换时，标准形中正系数的个数是不变的。

定理1：设有二次型 $f=x^TAx$，它的秩为 r，有两个可逆变换 $x=Cy$ 及 $x=Pz$ 使 $f=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ry_r^2$ $(k_i\neq 0)$ 及 $f=\lambda_1z_1^2+\lambda_2z_2^2+\cdots+\lambda_rz_r^2$ $(\lambda_i\neq 0)$，则 $k_1,\cdots,k_r$ 中正数的个数与 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 中正数的个数相等。（惯性定理）

二次型的标准形中正系数的个数称为二次型的正惯性指数，负系数的个数称为负惯性指数。

若二次型 f 的正惯性指数是 p，秩为 r，则 f 的规范形为：

$$f=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$$

定义：设有二次型 $f(x)=x^TAx$，如果对任何 $x\neq 0$，都有 $f(x)>0$，则称 f 为正定二次型，并称对称阵 A 是正定的；如果对任何 $x\neq 0$ 都有 $f(x)<0$，则称 f 为负定二次型，并称对称阵 A 是负定的。

定理2：二次型 $f=x^TAx$ 为正定的充分必要条件是：它的标准形的 n 个系数全为正，即它的正惯性指数等于 n。

推论：对称阵 A 为正定的充分必要条件是：A 的特征值全为正。

定理3：对称阵A为正定的充分必要条件是：A的各阶顺序主子式都为正，即

$$a_{11}>0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\ \cdots,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}>0$$

对称阵A为负定的充分必要条件是：奇数阶顺序主子式为负，而偶数阶顺序主子式为正，即

$$(-1)^r \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}>0,\ (r=1,2,\cdots,n).$$

例：判定二次型 $f=-5x^2-6y^2-4z^2+4xy+4xz$ 的正定性。

解：f的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$a_{11}=-5<0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}=26>0,\quad |A|=-80<0$$

∴ f为负定.