第四章 向量组的线性相关性

§1. 向量组及其线性组合

定义1：n个有次序的数$a_1, a_2, \cdots, a_n$所组成的数组称为n维向量，这n个数称为该向量的n个分量，第i个数a_i称为第i个分量。

分量全为实数的向量称为实向量，分量为复数的向量称为复向量。

n维向量可写成一行，也可写成一列，分别称为行向量和列向量。

n维列向量：
$$\vec{a}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}$$

n维行向量：
$$\vec{a}^T=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

规定行向量与列向量都按矩阵的运算规则进行运算。

若干个同维数的列向量（行向量）所组成的集合叫做向量组。

$m\times n$矩阵的全体列向量是一个含有n个m维列向量的向量组；

$m\times n$矩阵的全体行向量是一个含有m个n维行向量的向量组。

即矩阵的列向量组和行向量组都是只含有限个向量的向量组。

反之，一个含有限个向量的向量组总可以构成一个矩阵。

m个n维列向量所组成的向量组A：$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 构成一个$n\times m$矩阵 $A=(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m)$.

m个n维行向量所组成的向量组B：$\vec{\beta}_1^T, \vec{\beta}_2^T, \cdots \vec{\beta}_m^T$ 构成一个$m\times n$矩阵 ~~$B=(\beta_1^T, \beta_2^T, \cdots, \beta$~~
$$B=\begin{bmatrix}\vec{\beta}_1^T\\\vec{\beta}_2^T\\\vdots\\\vec{\beta}_m^T\end{bmatrix}$$

含有限个向量的有序向量组 $\longleftrightarrow$ 矩阵.（一一对应）

定义2：给定向量组A：$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$，对于任何一组实数$k_1, k_2, \cdots, k_m$，表达式 $k_1\vec{a}_1+k_2\vec{a}_2+\cdots+k_m\vec{a}_m$ 称为向量组A的一个线性组合，$k_1, k_2, \cdots, k_m$称为这个线性组合的系数。

给定向量组A：$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$和向量$\vec{b}$，如果存在一组数$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$，使 $\vec{b}=\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\cdots+\lambda_m\vec{a}_m$，则向量$\vec{b}$是向量组$A$的线性组合，这时称向量$b$能由向量组$A$线性表示。

向量$\vec{b}$能由向量组A线性表示，也就是方程组

$$x_1\vec{a}_1+x_2\vec{a}_2+\cdots+x_m\vec{a}_m=\vec{b} \text{ 有解.}$$

定理1：向量$\vec{b}$能由向量组A：$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_m$线性表示的充分必要条件是矩阵$A=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_m)$的秩等于$B=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_m,\vec{b})$的秩。

定义3：设有两个向量组A：$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_m$及B：$\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_l$，若B组中的每个向量都能由向量组A线性表示，则称向量组B能由向量组A线性表示。若向量组A与向量组B能相互线性表示，则称这两个向量组等价。

向量组A和B所构成的矩阵分别为：$A=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_m)$，$B=(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_l)$

向量组B能由向量组A线性表示，即对每个向量$\vec{b}_j$（$j=1,2,\cdots,l$）存在一组数$k_{1j},k_{2j},\cdots,k_{mj}$，

使 $$\vec{b}_j=k_{1j}\vec{a}_1+k_{2j}\vec{a}_2+\cdots+k_{mj}\vec{a}_m=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_m)\begin{bmatrix}k_{1j}\\k_{2j}\\\vdots\\k_{mj}\end{bmatrix}$$

则 $$(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_l)=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_m)\begin{bmatrix}k_{11}&k_{12}&\cdots&k_{1l}\\k_{21}&k_{22}&\cdots&k_{2l}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\k_{m1}&k_{m2}&\cdots&k_{ml}\end{bmatrix}$$

矩阵$K_{m\times l}=(k_{ij})$称为这一线性表示的系数矩阵.（$B=AK$）

若 $C_{m\times n}=A_{m\times l}B_{l\times n}$，则矩阵C的列向量组能由矩阵A的列向量组线性表示，B为这一表示的系数矩阵.

$$(\vec{c}_1,\vec{c}_2,\cdots,\vec{c}_n)=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_l)\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{l1}&b_{l2}&\cdots&b_{ln}\end{bmatrix}$$

同时，C的行向量组能由B的行向量组线性表示，A为这一表示的系数矩阵.

$$\begin{bmatrix}\vec{\gamma}_1^T\\\vec{\gamma}_2^T\\\vdots\\\vec{\gamma}_m^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1l}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2l}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{ml}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{\beta}_1^T\\\vec{\beta}_2^T\\\vdots\\\vec{\beta}_l^T\end{bmatrix}$$

$A \overset{r}{\sim} B$ 则 $PA=B$

矩阵A与B行等价，即矩阵A经初等行变换变成矩阵B，则B的行向量组能由A的行向量组线性表示。由于初等行变换可逆，则A的行向量组也能由B的行向量组线性表示。因此，A的行向量组与B的行向量组等价。 $A=P^{-1}B$

同理，若矩阵A与B列等价，则A的列向量组与B的列向量组等价。

对方程组A的各个方程作线性运算所得到的一个方程就称为方程组A的一个线性组合；若方程组B的每个方程都是方程组A的线性组合，就称方程组B能由方程组A线性表示，此时这个方程组A的解一定是方程组B的解；若方程组A与方程组B能相互线性表示，就称这两个方程组可互推，可互推的线性方程组一定同解。

向量组B：$\vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_l$ 能由向量组A：$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 线性表示，也就是矩阵方程 $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m)X=(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_l)$ 有解。

定理2：向量组B：$\vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_l$ 能由向量组A：$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 线性表示的充分必要条件是矩阵 $A=(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m)$ 的秩等于矩阵 $(A, B)=(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots \vec{a}_m, \vec{b}_1, \cdots \vec{b}_l)$ 的秩，即 $R(A)=R(A,B)$.

推论：向量组A：$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 与向量组B：$\vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_l$ 等价的充分必要条件是 $R(A)=R(B)=R(A,B)$，其中A和B是向量组A和B所构成的矩阵。

例1：设 $\vec{a}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\2\\2\end{bmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\3\end{bmatrix}$，$\vec{a}_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\4\\0\end{bmatrix}$，$\vec{b}=\begin{bmatrix}1\\0\\3\\1\end{bmatrix}$，证明向量$\vec{b}$能由向量组 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ 线性表示，并求出表示式。

解：
$$B=(A,\vec{b})=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&-1&0\\2&1&4&3\\2&3&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-2r_1}}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-2&-1\\0&-1&2&1\\0&1&-2&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3+r_2]{r_4+r_3}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-2&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{bmatrix}1&0&+3&2\\0&1&-2&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\therefore\ R(A)=R(B)=2$

$\therefore$ 向量b能由向量组A线性表示。

方程 $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)\vec{x}=\vec{b}$ 的通解：

$$\vec{x}=c\begin{bmatrix}-3\\2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}$$

$\because$ 表达式 $\vec{b}=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)x=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)\begin{bmatrix}-3c+2\\2c-1\\c\end{bmatrix}$

$=(-3c+2)\vec{a}_1+(2c-1)\vec{a}_2+c\vec{a}_3$

例2、设 $\vec{a}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{bmatrix}3\\1\\1\\3\end{bmatrix}$，$\vec{b}_1=\begin{bmatrix}2\\0\\1\\1\end{bmatrix}$，$\vec{b}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\2\end{bmatrix}$，$\vec{b}_3=\begin{bmatrix}3\\-1\\2\\0\end{bmatrix}$

证明向量组 $\vec{a}_1,\vec{a}_2$ 与向量组 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3$ 等价。

证：$(A,B)=\begin{bmatrix}1&3&2&1&3\\-1&1&0&1&-1\\1&1&1&0&2\\-1&3&1&2&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4+r_1]{\substack{r_2+r_1\\r_3-r_1}}\begin{bmatrix}1&3&2&1&3\\0&4&2&2&2\\0&-2&-1&-1&-1\\0&6&3&3&3\end{bmatrix}$

$\xrightarrow[\substack{r_4+3r_3\\r_3+r_2}]{r_2\times\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}1&3&2&1&3\\0&2&1&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$ $\therefore R(A)=R(A,B)=2$.

$\because$ 矩阵 B 中有2阶非零子式. $\therefore R(B)\geqslant 2$.

又 $\because R(B)\leqslant R(A,B)$ $\therefore R(B)=2$.

$\therefore R(A)=R(B)=R(A,B)$ 则向量组 $\vec{a}_1,\vec{a}_2$ 与向量组 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3$ 等价。

定理3：设向量组 $B:\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_l$ 能由向量组 $A:\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_m$ 线性表示，则 $R(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_l)\leqslant R(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_m)$.

证：记 $A=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_m)$，$B=(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_l)$

已知向量组 B 能由向量组 A 线性表示。 $\therefore R(A)=R(A,B)$

又 $\because R(B)\leqslant R(A,B)$

$\therefore R(B)\leqslant R(A)$.

向量组 $B:\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_l$ 能由向量组 $A:\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_m$ 线性表示.

$\Longleftrightarrow$ 有矩阵 K，使 $B=AK$. $\Longleftrightarrow$ 方程 $AX=B$ 有解.

例3. n 阶单位矩阵 $E=(\hat{e}_1,\hat{e}_2,\cdots,\hat{e}_n)$ 的列向量叫做 n 维单位坐标向量。设 n 维向量组 $A:\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_m$ 构成 $n\times m$ 矩阵 $A=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_m)$。证明：$n$ 维单位坐标向量组 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_n$ 能由向量组 A 线性表示的充分必要条件是 $R(A)=n$.

证：向量组$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n$能由向量组A线性表示的充分必要条件是$R(A)=R(A,E)$

$\because R(A,E) \geqslant R(E)=n$

又$\because$矩阵(A,E)含有n行．$\therefore R(A,E) \leqslant n$

$\therefore R(A,E)=n$ 则 $R(A)=R(A,E)=n$.

§2. 向量组的线性相关性.

定义：给定向量组A：$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$，如果存在不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_m$，使$k_1\vec{a}_1+k_2\vec{a}_2+\cdots+k_m\vec{a}_m=0$，则称向量组A是线性相关的，否则称它线性无关。

向量组A：$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ $(m \geqslant 2)$线性相关，即为在向量组A中至少有一个向量能由其它$m-1$个向量线性表示．

i 若向量组A线性相关，则有不全为0的数$k_1, k_2, \cdots, k_m$

使 $k_1\vec{a}_1+k_2\vec{a}_2+\cdots+k_m\vec{a}_m=0$.

设 $k_1 \neq 0$，则 $\vec{a}_1=\frac{-1}{k_1}(k_2\vec{a}_2+\cdots+k_m\vec{a}_m)$ 即$\vec{a}_1$能由$\vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$线性表示．

ii 若向量组A中有某个向量能由其它$m-1$个向量线性表示。设$\vec{a}_m$能由$\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_{m-1}$线性表示，即有$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{m-1}$ 使 $\vec{a}_m=\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\cdots+\lambda_{m-1}\vec{a}_{m-1}$

则 $\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\cdots+\lambda_{m-1}\vec{a}_{m-1}+(-1)\vec{a}_m=0$.

$\because \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{m-1}, -1$不全为0．$\therefore$向量组A线性相关。

向量组A：$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 构成矩阵$A=(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m)$，向量组A线性相关就是齐次线性方程组 $\vec{a}_1x_1+\vec{a}_2x_2+\cdots+\vec{a}_mx_m=0$，即 $A\vec{x}=0$ 有非零解。

定理4：向量组$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$线性相关的充分必要条件是它所构成的矩阵$A=(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m)$的秩小于向量个数$m$；向量组线性无关的充分必要条件是$R(A)=m$.

例4. 试讨论n维单位坐标向量组的线性相关性.

解：n维单位坐标向量组构成的矩阵 $E=(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n)$ n阶单位矩阵.

$\because |E|=1$ $\therefore R(E)=n$ 矩阵的秩等于向量组中向量的个数.

$\therefore$ 此向量组是线性无关的.

例5. 已知 $\vec{a}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{bmatrix}0\\2\\5\end{bmatrix}$，$\vec{a}_3=\begin{bmatrix}2\\4\\7\end{bmatrix}$，试讨论向量组 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 及向量组 $\vec{a}_1,\vec{a}_2$ 的线性相关性。

解：$(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)=\begin{bmatrix}1&0&2\\1&2&4\\1&5&7\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&2&2\\0&5&5\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-\frac{5}{2}r_2}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&2&2\\0&0&0\end{bmatrix}$

则 $R(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)=2$ $\quad R(\vec{a}_1,\vec{a}_2)=2$

∴ 向量组 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 线性相关，~~和~~向量组 $\vec{a}_1,\vec{a}_2$ 都线性无关。

例6. 已知向量组 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 线性无关，$\vec{b}_1=\vec{a}_1+\vec{a}_2$，$\vec{b}_2=\vec{a}_2+\vec{a}_3$，$\vec{b}_3=\vec{a}_3+\vec{a}_1$，试证向量组 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3$ 线性无关。

证明一：设有 x_1,x_2,x_3 使 $x_1b_1+x_2b_2+x_3b_3=0$

$$x_1(a_1+a_2)+x_2(a_2+a_3)+x_3(a_3+a_1)=0$$

$$(x_1+x_3)a_1+(x_1+x_2)a_2+(x_2+x_3)a_3=0$$

∵ 向量组 a_1,a_2,a_3 线性无关。

∴ $\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_1+x_2=0\\x_2+x_3=0\end{cases}$ ∵齐次线性方程组的系数行列式 $\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq0$

∴ 该方程组只有零解 $x_1=x_2=x_3=0$.

∴ 向量组 b_1,b_2,b_3 线性无关.

证明二：向量组 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3$ 能由向量组 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 线性表示，即

$$(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\quad 记作：B=AK$$

设 $Bx=0$，则 $A(Kx)=0$.

∵ 矩阵A的列向量组线性无关. ∴ $Kx=0$

∵ $|K|=2\neq0$ ∴ 方程 $Kx=0$ 只有零解 $x=0$.

∴ 矩阵B的列向量组 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3$ 线性无关。

证明三：$(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3) = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

记作：$B = AK$

$\because |K| = 2 \neq 0$ $\therefore$ 矩阵K可逆. 则矩阵A与B列等价.

$\therefore R(A) = R(B)$

$\because$ 向量组 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ 线性无关. $\therefore R(A) = 3$

$\therefore R(B) = 3$ 则矩阵B的列向量组线性无关.

即 向量组 $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ 线性无关.

定理5：(1) 若向量组 A：$\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m$ 线性相关，则向量组 B：$\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m, \vec{a}_{m+1}$ 也线性相关. 反言之，若向量组B线性无关，则向量组A也线性无关.

(2) m个n维向量组成的向量组，当维数n小于向量个数m时一定线性相关. 特别地，n+1个n维向量一定线性相关.

(3) 设向量组 A：$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 线性无关，而向量组 B：$\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m, \vec{b}$ 线性相关，则向量 $\vec{b}$ 必能由向量组A线性表示，且表示式是惟一的.

证明：(1) $A = (\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m)$，$B = (\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m, \vec{a}_{m+1})$

$$R(B) \leq R(A) + 1$$

若向量组A线性相关，则 $R(A) < m$.

$\therefore R(B) \leq R(A) + 1 < m + 1$

$\therefore$ 向量组B线性相关.

若向量组A是向量组B的一部分，则称A组是B组的部分组.

一个向量组若有线性相关的部分组，则该向量组线性相关.

含零向量的向量组必线性~~无关~~相关.

一个向量组若线性~~相关~~无关，则它的任何部分组都线性无关.

(2) m个n维向量构成矩阵 $A_{n\times m} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m)$.

$R(A) \leq n$ 若 $n < m$，则 $R(A) < m$

$\therefore$ m个向量线性相关.

(3) 记 $A=(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m)$，$B=(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m,\vec{b})$.

$R(A)\leqslant R(B)$

∵ A组线性无关. ∴ $R(A)=m$

∵ B组线性相关. ∴ $R(B)<m+1$ ∴ $m\leqslant R(B)<m+1$

∴ $R(B)=m$.

∵ $R(A)=R(B)=m$ 则 方程组 $(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m)x=\vec{b}$ 有惟一解.

∴ 向量$\vec{b}$能由向量组A线性表示，且表示式惟一.

例7. 设向量组$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$线性相关，向量组$\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4$线性无关，证明：
(1) $\vec{a}_1$能由$\vec{a}_2,\vec{a}_3$线性表示；(2) $\vec{a}_4$不能由$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$线性表示.

证明：(1) ∵ $\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4$ 线性无关. ∴ 其部分组$\vec{a}_2,\vec{a}_3$线性无关.

又∵ $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 线性相关.

∴ 向量$\vec{a}_1$能由$\vec{a}_2,\vec{a}_3$线性表示.

(2) 假设$\vec{a}_4$能由$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$线性表示.

∵ $\vec{a}_1$能由$\vec{a}_2,\vec{a}_3$线性表示. ∴ $\vec{a}_4$能由$\vec{a}_2,\vec{a}_3$线性表示.

与$\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4$线性无关矛盾.

§3. 向量组的秩.

定义：设有向量组A，如果在A中能选出r个向量$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_r$，满足
(i) 向量组A_0：$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_r$线性无关；
(ii) 向量组A中任意$r+1$个向量都线性相关.
那么称向量组A_0是向量组A的一个最大线性无关向量组（简称最大无关组）
最大无关组所含向量个数r称为向量组A的秩，记作R_A.

只含零向量的向量组没有最大无关组，规定它的秩为0.

定理6：矩阵的秩等于它的列向量组的秩，也等于它的行向量组的秩.

证：设$A=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_m)$，$R(A)=r$，r阶子式$D_r\neq 0$.

$\because D_r \neq 0$ 则与之对应的矩阵的秩为 r，即得 D_r 所在的 r 列线性无关。

又 $\because$ A 中所有 $r+1$ 阶子式均为 0，可知 A 中任意 $r+1$ 个列向量都线性相关。

$\therefore$ D_r 所在的 r 列是 A 的列向量组的一个最大无关组。

$\therefore$ 列向量组的秩等于 r。

同理 矩阵 A 的行向量组的秩等于 $R(A)$。

若 D_r 是矩阵 A 的一个最高阶非零子式，则 D_r 所在的 r 列即是 A 的列向量组的一个最大无关组，D_r 所在的 r 行即是 A 的行向量组的一个最大无关组。

向量组 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 的秩也记作 $R(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m)$。

向量组的最大无关组一般不是唯一的。

例：
$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{则}\left.\begin{array}{ll} R(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = 2, & \vec{a}_1, \vec{a}_2 \text{ 线性无关.} \\ R(\vec{a}_1, \vec{a}_3) = 2, & \vec{a}_1, \vec{a}_3 \text{ 线性无关.} \\ R(\vec{a}_2, \vec{a}_3) = 2, & \vec{a}_2, \vec{a}_3 \text{ 线性无关.} \\ R(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = 2, & \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \text{ 线性相关.} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$\vec{a}_1, \vec{a}_2$；$\vec{a}_1, \vec{a}_3$ 和 $\vec{a}_2, \vec{a}_3$ 都是向量组 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ 的最大无关组。

例1. 全体 n 维向量构成的向量组记作 R^n，求 R^n 的一个最无关组及 R^n 的秩。

解：$\because$ n 维单位坐标向量构成的向量组 E：$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n$ 是线性无关的。

又 $\because$ R^n 中任意 $n+1$ 个向量线性相关。（$\because$ 向量个数大于向量维数.）

$\therefore$ 向量组 E 是 R^n 的一个最大无关组，且 R^n 的秩等于 n。

任何 n 个线性无关的 n 维向量都是 R^n 的最大无关组。

注意：向量组 A 和它的最大无关组 A_0 是等价的。

i $\because$ A_0 组是 A 组的部分组. $\therefore$ A_0 组能由 A 组线性表示.

ii 由最大无关组的定义可知，$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_r$ 线性无关。而对于 A 中的任一向量 $\vec{a}$，$r+1$ 个向量 $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r, \vec{a}$ 线性相关。则向量 $\vec{a}$ 能由 $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r$ 线性表示，即 A 能由 A_0 线性表示.

$\therefore$ A 组和 A_0 组等价.

推论（最大无关组的等价定义）：

设向量组 A_0：$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_r$ 是向量组 A 的一个部分组，且满足

i 向量组 A_0 线性无关；

ii 向量组 A 的任一向量都能由向量组 A_0 线性表示.

那么向量组 A_0 便是向量组 A 的一个最大无关组.

证：只要证向量组 A 中任意 $r+1$ 个向量线性相关即可.

设 $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_{r+1}$ 是 A 中任意 $r+1$ 个向量.

由条件 ii 可知，这 $r+1$ 个向量能由向量组 A_0 线性表示.

则 $R(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_{r+1}) \leq R(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_r) = r$

$\therefore$ $r+1$ 个向量 $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_{r+1}$ 线性相关.

$\therefore$ A_0 组便是 A 组的一个最大无关组.

例2. 设齐次方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-2x_4=0 \\ 2x_1+3x_2-x_4=0 \\ x_1-x_2-5x_3+7x_4=0 \end{cases}$ 的全体解向量构成的向量组为 S，求 S 的秩.

解：$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -5 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_1+2r_2 \\ r_2\times(-1)}]{r_3-3r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

得 $\begin{cases} x_1 = 3x_3 - 4x_4 \\ x_2 = -2x_3+3x_4 \end{cases}$

令 $x_3 = c_1$，$x_4 = c_2$，得 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

上式记作 $\vec{x} = c_1\vec{\xi}_1 + c_2\vec{\xi}_2$

则向量组 $S = \{\vec{x} = c_1\vec{\xi}_1 + c_2\vec{\xi}_2 \mid c_1, c_2 \in R\}$

$\because$ $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2$ 的四个分量不成比例. $\therefore$ $\vec{\xi}_1$ 和 $\vec{\xi}_2$ 线性无关.

由最大无关组的等价定义可知，$\vec{\xi}_1$ 和 $\vec{\xi}_2$ 是 S 的最大无关组.

$\therefore$ $R_S = 2$.

设向量组 A：$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 构成矩阵 $A=(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m)$.

则 $R_A = R(\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m) = R(A)$.

由此可知，定理1、2、3、4中矩阵的秩都可改为向量组的秩.

定理2：向量组 $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_l$ 能由向量组 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 线性表示的充分必要条件是 $R(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m) = R(\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m, \vec{b}_1, \cdots \vec{b}_l)$.

下面将向量组只含有限个向量推广到一般情形.

定理3′：若向量组 B 能由向量组 A 线性表示，则 $R_B \leqslant R_A$.

证明：设 $R_A = s$，$R_B = t$，向量组 A 和 B 的最大无关组分别为

$$A_0: \vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s \quad \text{和} \quad B_0: \vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_t.$$

$\because$ B_0 组能由 B 组表示，B 组能由 A 组线性表示，A 组能由 A_0 组表示.

$\therefore$ B_0 组能由 A_0 组线性表示.

$\therefore$ $R(B_0) \leqslant R(A_0)$ 即 $R(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_t) \leqslant R(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s)$

即 $t \leqslant s$ 即 $R_B \leqslant R_A$.

例3. 设向量组 B 能由向量组 A 线性表示，且它们的秩相等，证明向量组 A 与向量组 B 等价.

证明：设向量组 A 和 B 合并成向量组 C.

$\because$ 向量组 B 能由向量组 A 线性表示. $\therefore$ $R_A = R_C$

又 $\because$ $R_A = R_B$ $\therefore$ $R_A = R_B = R_C$

$\therefore$ 向量组 A 和 B 等价.

例4. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{bmatrix}$，求矩阵 A 的列向量组的一个最大无关组，并把不属于最大无关组的列向量用最大无关组线性表示.

解：$A \overset{r}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\therefore$ $R(A) = 3$

则 A 的列向量组的最大无关组含3个向量.

∵三个非零行的第一个非0元素分别在1、2、4列.

∴ $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4$ 为列向量组的一个最大无关组.

∵ $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4) \overset{r}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 则 $R(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4) = 3$

∴ $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4$ 线性无关.

$$A \overset{r}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4, \vec{b}_5)$$

∵ 方程 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解.

即 $\vec{a}_1 x_1 + \vec{a}_2 x_2 + \vec{a}_3 x_3 + \vec{a}_4 x_4 + \vec{a}_5 x_5 = 0$

与 $\vec{b}_1 x_1 + \vec{b}_2 x_2 + \vec{b}_3 x_3 + \vec{b}_4 x_4 + \vec{b}_5 x_5 = 0$ 同解.

∴ 向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_5$ 之间与向量 $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4, \vec{b}_5$ 之间具有相同的线性关系

$$\vec{b}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -\vec{b}_1 - \vec{b}_2$$

$$\vec{b}_5 = 4\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2 - 3\vec{b}_4$$

∴ $\vec{a}_3 = -\vec{a}_1 - \vec{a}_2$, $\vec{a}_5 = 4\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 - 3\vec{a}_4$.

§4. 线性方程组的解的结构.

用向量组线性相关性的理论来讨论线性方程组的解.

一. 齐次线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ 则 (1)式可写为 $A\vec{x} = 0$ (2)

若$x_1=\xi_{11}$，$x_2=\xi_{21}$，…，$x_n=\xi_{n1}$为(1)的解，则

$$\vec{x}=\vec{\xi}_1=\begin{bmatrix}\xi_{11}\\ \xi_{21}\\ \vdots\\ \xi_{n1}\end{bmatrix}$$ 称为方程组(1)的解向量，也是向量方程(2)的解.

性质1：若$\vec{x}=\vec{\xi}_1$，$\vec{x}=\vec{\xi}_2$为(2)的解，则$\vec{x}=\vec{\xi}_1+\vec{\xi}_2$也是(2)的解.

证：$A(\vec{\xi}_1+\vec{\xi}_2)=A\vec{\xi}_1+A\vec{\xi}_2=0$

性质2：若$\vec{x}=\vec{\xi}_1$为(2)的解，k为实数，则$\vec{x}=k\vec{\xi}_1$也是(2)的解.

证：$A(k\vec{\xi}_1)=k(A\vec{\xi}_1)=0$

将方程(2)的全体解所组成的集合记作S，若能求得解集S的一个最大无关组S_0：$\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2,\cdots,\vec{\xi}_t$，则方程(2)的任一解都可由$S_0$线性表示.
由性质1,2可知，$\vec{x}=k_1\vec{\xi}_1+k_2\vec{\xi}_2+\cdots+k_t\vec{\xi}_t$是方程(2)的通解.

齐次线性方程组的解集的最大无关组称为该齐次线性方程组的基础解系

设方程组(1)的系数矩阵A的秩为r，并设A的前r个列向量线性无关，则A的行最简形矩阵为：

$$B=\begin{bmatrix}1&\cdots&0&b_{11}&\cdots&b_{1,n-r}\\ \vdots&&&\vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&1&b_{r1}&\cdots&b_{r,n-r}\\ 0&&&\cdots&&0\\ \vdots&&&&&\vdots\\ 0&&&\cdots&&0\end{bmatrix}$$

与B对应，即有

$$\begin{cases}x_1=-b_{11}x_{r+1}-\cdots-b_{1,n-r}x_n\\ \cdots\cdots\\ x_r=-b_{r1}x_{r+1}-\cdots-b_{r,n-r}x_n\end{cases}\qquad(3)$$

得方程组(1)的通解：

$$\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_r\\ x_{r+1}\\ x_{r+2}\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}-b_{11}\\ \vdots\\ -b_{r1}\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-b_{12}\\ \vdots\\ -b_{r2}\\ 0\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}+\cdots+c_{n-r}\begin{bmatrix}-b_{1,n-r}\\ \vdots\\ -b_{r,n-r}\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}$$

记作 $\vec{x}=c_1\vec{\xi}_1+c_2\vec{\xi}_2+\cdots+c_{n-r}\vec{\xi}_{n-r}$

可知解集S中的任一向量x能由$\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2,\cdots,\vec{\xi}_{n-r}$线性表示.

$\because$ 矩阵 $(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \cdots, \vec{\xi}_{n-r})$ 中有 $n-r$ 阶子式 $|E_{n-r}| \neq 0$.

$\therefore$ $R(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \cdots, \vec{\xi}_{n-r}) = n-r$

$\therefore$ 向量 $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \cdots, \vec{\xi}_{n-r}$ 线性无关.

因此，由最大无关组的等价定义可知 $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \cdots, \vec{\xi}_{n-r}$ 是解集 S 的最大无关组，即 $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \cdots, \vec{\xi}_{n-r}$ 是方程组(1)的基础解系.

先求基础解系，再写出通解.

在得到方程组(3)之后，令自由未知数 $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ 取下列 $n-r$ 组数：

$$\begin{bmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

则由(3)可得，
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \end{bmatrix}$$

合起来便得基础解系：

$$\vec{\xi}_1 = \begin{bmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{\xi}_2 = \begin{bmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \vec{\xi}_{n-r} = \begin{bmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

定理7：设 $m \times n$ 矩阵 A 的秩 $R(A) = r$，则 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解集 S 的秩 $R_S = n-r$.

当 $R(A) = n$ 时，方程组(1)只有零解，没有基础解系.

当 $R(A) = r < n$ 时，方程组(1)的基础解系含 $n-r$ 个向量.

方程组(1)的任意 $n-r$ 个线性无关的解都可构成它的基础解系，则可知齐次线性方程组的基础解系不是唯一的，它的通解形式也不唯一.

例1. 求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=0 \\ 2x_1-5x_2+3x_3+2x_4=0 \\ 7x_1-7x_2+3x_3+x_4=0 \end{cases}$ 的基础解系与通解.

解: $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & 3 & 2 \\ 7 & -7 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3-7r_1]{r_2-2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 5 & 4 \\ 0 & -14 & +10 & +8 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow[r_1-r_2]{r_2\times(-\frac{1}{7})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 得 $\begin{cases} x_1=\frac{2}{7}x_3+\frac{3}{7}x_4 \\ x_2=\frac{5}{7}x_3+\frac{4}{7}x_4 \end{cases}$ (*)

令 $\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 则对应得 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{5}{7} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{bmatrix}$

即得基础解系: $\vec{\xi}_1=\begin{bmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{5}{7} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{\xi}_2=\begin{bmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

则通解为: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=C_1\begin{bmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{5}{7} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+C_2\begin{bmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (C_1, C_2 \in R).$

根据(*)式, 若取 $\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 对应得 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{5}{7} \\ \frac{9}{7} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} \end{bmatrix}$

得不同基础解系: $\vec{\eta}_1=\begin{bmatrix} \frac{5}{7} \\ \frac{9}{7} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{\eta}_2=\begin{bmatrix} -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

得通解为: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix} \frac{5}{7} \\ \frac{9}{7} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (k_1, k_2 \in R).$

两个通解虽然形式不一样, 但都含两个任意常数, 都可表示方程组的任一解.

例2. 设 $A_{m\times n}B_{n\times l}=0$, 证明 $R(A)+R(B)\leqslant n$.

证明：设 $B=(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_l)$, 则 $A(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_l)=0$

即 $A\vec{b}_i=0 \quad (i=1,2,\cdots,l)$

表明矩阵B的列向量都是齐次方程 $A\vec{x}=0$ 的解. 方程 $A\vec{x}=0$ 的解集为S.

$\because \vec{b}_i\in S \quad \therefore R(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_l)\leqslant R_S$ 即 $R(B)\leqslant R_S$

$\because R(A)+R_S=n \quad \therefore R(A)+R(B)\leqslant n$.

例3. 证明矩阵 $A_{m\times n}$ 与 $B_{l\times n}$ 的行向量组等价的充分必要条件是齐次方程组 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解.

证：必要性显然成立，仅证明充分性.

设方程 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，则也与方程 $\begin{cases}Ax=0\\Bx=0\end{cases}$ 即 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=0$ 同解.

设解集S的秩为t, 则三个系数矩阵的秩均为 $n-t$.

$\therefore \quad R(A)=R(B)=R\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$

$R(A^T)=R(B^T)=R(A^T,B^T)$

则 A^T 与 B^T 的列向量组等价，即A与B的行向量组等价.

例4. 证明 $R(A^TA)=R(A)$.

证：设A为 $m\times n$ 矩阵，x 为n维列向量.

若 x 满足 $Ax=0$，则 $A^T(Ax)=0$，即 $(A^TA)x=0$.

若 x 满足 $(A^TA)x=0$，则 $x^T(A^TA)x=0$，即 $(Ax)^TAx=0$，得 $Ax=0$

则可知方程组 $Ax=0$ 与 $(A^TA)x=0$ 同解.

$\therefore \quad R(A^TA)=R(A)$.

二. 非齐次线性方程组：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\qquad(4)$$

可写作向量方程 $A\vec{x}=\vec{b}$

性质3、设 $\vec{x}=\vec{\eta}_1$ 及 $\vec{x}=\vec{\eta}_2$ 都是(5)的解，则 $\vec{x}=\vec{\eta}_1-\vec{\eta}_2$ 为对应的齐次线性方程组 $A\vec{x}=0$　　(6)　　的解.

证：$A(\vec{\eta}_1-\vec{\eta}_2)=A\vec{\eta}_1-A\vec{\eta}_2=0$

性质4：设 $\vec{x}=\vec{\eta}$ 是方程(5)的解，$\vec{x}=\vec{\xi}$ 是方程(6)的解，则 $\vec{x}=\vec{\eta}+\vec{\xi}$ 仍是方程(5)的解.

证：$A(\vec{\eta}+\vec{\xi})=A\vec{\eta}+A\vec{\xi}=\vec{b}+0=\vec{b}$

由以上性质可知，若求得(5)的一个解 $\vec{\eta}^*$，方程(6)的解 $\vec{\xi}$，

则方程(5)的任一解可表示为 $\vec{x}=\vec{\xi}+\vec{\eta}^*$.

若方程(6)的通解为 $\vec{x}=k_1\vec{\xi}_1+\cdots+k_{n-r}\vec{\xi}_{n-r}$，

则方程(5)的通解为：$\vec{x}=k_1\vec{\xi}_1+\cdots+k_{n-r}\vec{\xi}_{n-r}+\vec{\eta}^*$，($k_1,\cdots,k_{n-r}$ 为任意实数)

其中 $\vec{\xi}_1,\cdots,\vec{\xi}_{n-r}$ 是方程组(6)的基础解系.

例5. 求解方程组
$$\begin{cases} x_1-x_2-x_3+x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3-3x_4=1 \\ x_1-x_2-2x_3+3x_4=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

解：
$$B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_2\times\frac{1}{2} \\ r_3+r_2}]{r_1-r_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$R(A)=R(B)=2$

$\therefore$ 方程组有解.

则
$$\begin{cases} x_1=x_2+x_4+\frac{1}{2} \\ x_3=2x_4+\frac{1}{2} \end{cases}$$

取 $x_2=x_4=0$，则 $x_1=x_3=\frac{1}{2}$.

得方程组的一个解
$$\vec{\eta}^*=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

对应的齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 \\ x_3 = 2x_4 \end{cases}$

取 $\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，则 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

得对应的齐次线性方程组的基础解系：

$$\vec{\xi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\xi}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

则通解为：$\vec{x} = c_1\vec{\xi}_1 + c_2\vec{\xi}_2 + \vec{\eta}^*$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (c_1, c_2 \in R).$$

§5. 向量空间.

n维向量的全体所构成的集合R^n叫做n维向量空间.

定义1：设V为n维向量的集合，如果集合V非空，且集合V对于加法及乘数两种运算封闭，那么就称集合V为向量空间.

封闭：若$\vec{a} \in V$，$\vec{b} \in V$，则 $\vec{a} + \vec{b} \in V$；

若$\vec{a} \in V$，$\lambda \in R$，则 $\lambda\vec{a} \in V$.

例1. 3维向量的全体R^3，就是一个向量空间.

∵ 任意 $\vec{a} \in R^3$，$\vec{b} \in R^3$，有 $\vec{a} + \vec{b} \in R^3$

任意 $\vec{a} \in R^3$，$\lambda \in R$，有 $\lambda\vec{a} \in R^3$

∴ R^3是一个向量空间.

同理 n维向量的全体R^n也是一个向量空间.

例2. 集合 $V = \{\vec{x} = (0, x_2, \cdots, x_n)^T \mid x_2, \cdots, x_n \in R\}$ 是一个向量空间.

解：$\because$ $\vec{a}=(0,a_2,\cdots,a_n)^T\in V$ ，$\vec{b}=(0,b_2,\cdots,b_n)^T\in V$

则 $\vec{a}+\vec{b}=(0,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)^T\in V$

$\lambda\vec{a}=(0,\lambda a_2,\cdots,\lambda a_n)^T\in V$

$\therefore$ 集合V是一个向量空间.

例3. 集合$V=\{$~~对~~$\vec{x}=(1,x_2,\cdots,x_n)^T \mid x_2,\cdots,x_n\in R\}$不是向量空间.

若 $\vec{a}=(1,a_2,\cdots,a_n)^T\in V$，则 $2\vec{a}=(2,2a_2,\cdots,2a_n)^T\notin V$.

例4. 齐次线性方程组的解集 $S=\{\vec{x}\mid A\vec{x}=0\}$ 是一个向量空间.

由齐次线性方程组的解的性质可知，其解集S对向量的线性运算封闭.

例5. 非齐次线性方程组的解集 $S=\{\vec{x}\mid A\vec{x}=b\}$ 不是向量空间.

$\because$ 当方程组无解时，S为空集，此时S不是向量空间.

又$\because$ 当S非空时，若$\vec{\eta}\in S$，则 $A(2\vec{\eta})=2b\neq b$，$2\vec{\eta}\notin S$.

例6. 设$\vec{a},\vec{b}$为两个已知的n维向量，集合$L=\{\vec{x}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}\mid \lambda,\mu\in R\}$是一个向量空间.

若 $\vec{x}_1=\lambda_1\vec{a}+\mu_1\vec{b}$，$\vec{x}_2=\lambda_2\vec{a}+\mu_2\vec{b}$

则 $\vec{x}_1+\vec{x}_2=(\lambda_1+\lambda_2)\vec{a}+(\mu_1+\mu_2)\vec{b}\in L$

$k\vec{x}_1=(k\lambda_1)\vec{a}+(k\mu_1)\vec{b}\in L$

向量空间L称为由向量$\vec{a},\vec{b}$所生成的向量空间.

由向量组$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_m$所生成的向量空间为：

$$L=\{\vec{x}=\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\cdots+\lambda_m\vec{a}_m\mid \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\in R\}.$$

例7. 设向量组$\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m$与向量组$\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_s$等价，记

$L_1=\{\vec{x}=\lambda_1\vec{a}_1+\cdots+\lambda_m\vec{a}_m\mid \lambda_1,\cdots,\lambda_m\in R\}$

$L_2=\{\vec{x}=\mu_1\vec{b}_1+\cdots+\mu_s\vec{b}_s\mid \mu_1,\cdots,\mu_s\in R\}$，证：$L_1=L_2$.

证明：设$\vec{x}\in L_1$，则$\vec{x}$可由$\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m$线性表示.

$\because$ 向量组$\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m$与向量组$\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_s$等价.

$\therefore$ $\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m$可由$\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_s$线性表示.

$\therefore \vec{x}$ 可由 $\vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_s$ 线性表示. 即 $\vec{x} \in L_2$

即当 $\vec{x} \in L_1$ 时 $\vec{x} \in L_2$，则 $L_1 \subset L_2$.

同理 若 $\vec{x} \in L_2$，则 $\vec{x} \in L_1$ $\therefore L_2 \subset L_1$

$\therefore \quad L_1 = L_2$.

定义2：设有向量空间 V_1 及 V_2，若 $V_1 \subset V_2$，则称 V_1 是 V_2 的子空间.

定义3：设 V 为向量空间，如果 r 个向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_r \in V$，且满足

i $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_r$ 线性无关

ii V 中任一向量都可由 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_r$ 线性表示

那么，向量组 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_r$ 称为向量空间 V 的一个基，r 称为向量空间 V 的维数，并称 V 为 r 维向量空间.

0维向量空间只含一个零向量，它没有基。

将向量空间 V 看作向量组，则由最大无关组的等价定义可知，V 的基就是向量组的最大无关组，V 的维数就是向量组的秩.

例：任何 n 个线性无关的 n 维向量都是向量组 R^n 的一个最大无关组，则对应地它也是向量空间 R^n 的一个基，且可知 R^n 的维数为 n.

由向量组 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 所生成的向量空间：

$$L = \{ \cancel{\vec{x} \mid} \vec{x} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \cdots + \lambda_m \vec{a}_m \mid \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \in R \}$$

$\because$ 向量空间 L 与向量组 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 等价。

$\therefore$ 向量组 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 的最大无关组就是 L 的一个基.

向量组 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 的秩就是 L 的维数.

若向量~~组~~空间 $V \subset R^n$，则 V 的维数不会超过 n. 当 V 的维数为 n 时，$V = R^n$.

若向量组 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_r$ 是向量空间 V 的一个基，则 V 可表示为

$$V = \{ \vec{x} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \cdots + \lambda_r \vec{a}_r \mid \lambda_1, \cdots, \lambda_r \in R \}$$

即 V 是基所生成的向量空间. V 中任一向量 $\vec{x}$ 可惟一地表示为：

$\vec{x} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \cdots + \lambda_r \vec{a}_r$，数组 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 称为向量 $\vec{x}$ 在基 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_r$ 中的坐标.

在n维向量空间R^n中取单位坐标向量组$\hat{e}_1, \hat{e}_2, \cdots, \hat{e}_n$为基，则以$x_1, x_2, \cdots, x_n$为分量的向量$\vec{x}$，可表示为 $\vec{x} = x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2 + \cdots + x_n\hat{e}_n$.

向量在基$\hat{e}_1, \hat{e}_2, \cdots, \hat{e}_n$中的坐标就是该向量的分量.

将$\hat{e}_1, \hat{e}_2, \cdots, \hat{e}_n$叫做$R^n$中的自然基。

例8. 设 $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$，$B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

验证$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$是$R^3$的一个基，并求$\vec{b}_1, \vec{b}_2$在这个基中的坐标.

解：要证$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$是$R^3$的一个基，只要证$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$线性无关，即证$A \sim E$.

$\vec{b}_1 = x_{11}\vec{a}_1 + x_{21}\vec{a}_2 + x_{31}\vec{a}_3$，　$\vec{b}_2 = x_{12}\vec{a}_1 + x_{22}\vec{a}_2 + x_{32}\vec{a}_3$

$(\vec{b}_1, \vec{b}_2) = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{bmatrix}$　记作：$B = AX$，$X = A^{-1}B$

$(A, B) \overset{r}{\sim} (E, X)$　其中 $X = A^{-1}B$

$$(A,B) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 + r_1}]{\frac{1}{3}(r_1+r_2+r_3)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 \times \frac{1}{3}]{r_2 \times (-\frac{1}{3})} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & +1 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_2]{r_1 - r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$\because A \sim E$　$\therefore R(A) = R(E) = 3$

$\therefore$ $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$线性无关，即$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$是$R^3$的一个基.

$$(\vec{b}_1, \vec{b}_2) = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} & 1 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $\vec{b}_1, \vec{b}_2$在基$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$中的坐标依次为$\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -1$和$\frac{4}{3}, 1, \frac{2}{3}$.

例9. 在R^3中取定一个基$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$，再取一个新基$\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$，设$A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$，$B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$. 求用$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$表示$\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$的表示式，并求向量在两个基中的坐标之间的关系式.

解：$(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)=(\hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3)A$ 则 $(\hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3)=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)A^{-1}$

$(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)=(\hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3)B=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)A^{-1}B$

∴ 基变换公式为 $(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)P$

上式中 $P=A^{-1}B$ 称为从旧基到新基的过渡矩阵.

设向量 ξ 在旧基和新基中的坐标分别为 y_1, y_2, y_3 和 z_1, z_2, z_3.

$$\vec{\xi}=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix},\quad \vec{\xi}=(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix}$$

$$\therefore\quad A\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=B\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix}\quad \text{则}\quad \begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix}=B^{-1}A\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$$

从旧坐标到新坐标的坐标变换公式为：$\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix}=P^{-1}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$.