

第三章 矩阵的初等变换与线性方程组

§1. 矩阵的初等变换.

引例: 求解线性方程组.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2 & ① \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & ② \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4 & ③ \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 & ④ \end{cases} \quad (1)$$

解: $\begin{matrix} ① \leftrightarrow ② \\ ③ \div 2 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & ① \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2 & ② \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2 & ③ \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 & ④ \end{cases}$

$\begin{matrix} ② - ③ \\ ③ - 2① \\ ④ - 3① \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & ① \\ 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 & ② \\ -5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6 & ③ \\ 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3 & ④ \end{cases}$

$\begin{matrix} ② \times \frac{1}{2} \\ ③ + 5② \\ ④ - 3② \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & ① \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 & ② \\ 2x_4 = -6 & ③ \\ x_4 = -3 & ④ \end{cases}$

$\begin{matrix} ③ \leftrightarrow ④ \\ ④ - 2③ \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & ① \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 & ② \\ x_4 = -3 & ③ \\ 0 = 0 & ④ \end{cases}$

方程组呈阶梯形.

得 $\begin{cases} x_1 = x_3 + 4 \\ x_2 = x_3 + 3 \\ x_4 = -3 \end{cases}$ 其中 x_3 可取任意值.

令 $x_3 = C$, 则方程组的解记作

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C+4 \\ C+3 \\ C \\ -3 \end{bmatrix} \quad \text{即} \vec{x} = C \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

上述消元过程中, 始终把方程组看作一个整体, 即不是着眼于某一个方程的变形, 而是着眼于整个方程组变成另一个方程组。

用到三种变换: ① 交换方程次序, ② 以不等于 0 的数乘某个方程, ③ 一个方程加上另一个方程的 k 倍。

由于这三种变换都是可逆的, 因此变换前后的方程组是同解的, 这三种变换都是方程组的同解变换, 求得的解(2)就是方程组(1)的全部解。

上述变换过程中, 实际上只对方程组的系数和常数进行, 未知数并未参与运算。因此, 若记方程组(1)的增广矩阵为 $B = (A, b)$ 那么上述对方程组的变换可以转换为对矩阵 B 的变换。将方程组的上述三种同解变换移植到矩阵上, 可得矩阵的三种初等变换。

定义 1: 下面三种变换称为矩阵的初等行变换:

- i 对调两行, 记作 $r_i \leftrightarrow r_j$.
- ii 以数 $k \neq 0$ 乘某一行中的所有元素, 记作 $r_i \times k$.
- iii 将某一行所有元素的 k 倍加到另一行对应的元素上去, 记作 $r_i + kr_j$.

把定义中的“行”换成“列”, 即得矩阵的初等列变换的定义。

矩阵的初等行变换与初等列变换, 统称为初等变换。

显然, 三种初等变换都是可逆的。

若矩阵 A 经有限次初等行变换变成矩阵 B , 就称矩阵 A 与 B 行等价, $A \sim_r B$.

若矩阵 A 经有限次初等列变换变成矩阵 B , 就称矩阵 A 与 B 列等价, $A \sim_c B$.

若矩阵 A 经有限次初等变换变成矩阵 B , 就称矩阵 A 与 B 等价, 记作 $A \sim B$.

矩阵等价关系的性质:

i 反身性: $A \sim A$

ii 对称性: 若 $A \sim B$, 则 $B \sim A$

iii 传递性: 若 $A \sim B, B \sim C$, 则 $A \sim C$.

下面用矩阵的初等行变换来解方程组 (1):

$$B = (A, \vec{b}) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 \times \frac{1}{2}]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{bmatrix} \quad B_1$$

$$\xrightarrow[r_4 - 3r_1]{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 - 2r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4 - 3r_2]{\substack{r_2 \times \frac{1}{2} \\ r_3 + 5r_2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} = B_2$$

$$\xrightarrow[r_4 - 2r_3]{r_3 \leftrightarrow r_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 - r_3]{r_1 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B_3$$

行阶梯形矩阵

对应方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 4 \\ x_2 - x_3 = 3 \\ x_4 = -3 \end{cases}$$

取 x_3 为自由未知数, 且令 $x_3 = C$, 得

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C+4 \\ C+3 \\ C \\ -3 \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \text{ 其中 } C \text{ 为任意常数}$$

矩阵 B_4, B_5 称为行阶梯形矩阵, 特点: 可画出一条阶梯线, 线的下方全为 0; 每个台阶只有一行, 台阶数即是非零行的行数, 阶梯线的竖线 (每段竖线的长度为 1 行) 后面的第一个元素为非零元, 即非零行的第一个非零元.

行阶梯形矩阵 B_s 还称为行最简形矩阵, 特点: 非零行的第一个非零元为 1, 且这些非零元所在的列的其他元素为 0.

对于任何矩阵 $A_{m \times n}$, 总可经过有限次初等行变换把它变成行阶梯形矩阵和行最简形矩阵.

由引例可知, 要解线性方程组只要把对应的增广矩阵化为行最简形矩阵. 由行最简形矩阵 B_s , 即可写出方程组的解 (2), 反之由方程组的解 (2) 也可写出矩阵 B_s . 由此可想到一个矩阵的行最简形矩阵是唯一确定的.

对行最简形矩阵再施以初等列变换, 可变为一种形状更简单的矩阵.

$$B_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{C_3 \leftrightarrow C_4 \\ C_4 + C_1 + C_2 \\ C_5 - 4C_1 - 3C_2 + 3C_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = F$$

矩阵 F 称为矩阵 B 的标准形, 特点: F 的左上角是一个单位矩阵, 其余元素全为 0.

对于 $m \times n$ 矩阵 A , 总可经过初等变换把它化成标准形 $F = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}$ 其中 r 就是行阶梯形矩阵中非零行的行数. P61 定理1

所有与 A 等价的矩阵组成一个集合, 称为一个等价类. 标准形 F 是这个等价类中形状最简单的矩阵.

例1. 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, 把 (A, E) 化成行最简形.

$$\begin{aligned} \text{解: } (A, E) &= \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{r_3 \times 3 \\ r_3 + 2r_1}} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -4 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3 \times 2 \\ r_3 + 9r_2}} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 4 & 6 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{r_1 + 2r_3 \\ r_2 - r_3}} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 18 & 9 & 12 \\ 0 & -2 & 0 & -8 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 4 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 \div 3 \\ r_2 \div (-2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 4 & 6 \end{bmatrix} = (E, X) \end{aligned}$$

则 E 应是 A 的行最简形, 即 $A \sim E$. 且可验证 $AX = E$, 即 $X = A^{-1}$.

$$AX = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E. \quad \text{则 } X = A^{-1}.$$

下节将证明, 对任何方阵 A , $A \sim E$ 的充分必要条件是 A 可逆, 且当 A 可逆时, $(A, E) \sim (E, A^{-1})$.

§2. 初等矩阵.

定义: 由单位阵 E 经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵.

三种初等变换对应着三种初等矩阵.

1. 对调两行或对调两列.

将单位阵中第 i, j 两行对调 (或第 i, j 两列对调), 得初等矩阵

$$E(i, j) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \cdots & 1 \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \end{matrix}$$

用 m 阶初等矩阵 $E_m(i, j)$ 左乘矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, 得

$$E_m(i, j)A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \cdots & 1 \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{ji} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ a_{zi} & a_{z2} & \cdots & a_{zn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{mi} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \end{matrix}$$

其结果相当于把 A 的第 i 行与第 j 行对调 ($r_i \leftrightarrow r_j$). (第一种初等行变换)

以 n 阶初等矩阵 $E_n(i, j)$ 右乘矩阵 A , 其结果相当于对矩阵 A 进行第一种初等列变换: 把 A 的第 i 列与第 j 列对调 ($c_i \leftrightarrow c_j$).

2. 以数 $k \neq 0$ 乘某行或某列.

以数 $k \neq 0$ 乘单位阵的第 i 行 (或第 i 列), 得初等矩阵

$$E(i(k)) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & k & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{第 } i \text{ 行}$$

验证可知：以 $E_m(i(k))$ 左乘矩阵 A ，相当于以数 k 乘 A 的第 i 行 ($r_i \times k$)，
以 $E_n(i(k))$ 右乘矩阵 A ，相当于以数 k 乘 A 的第 i 列 ($c_i \times k$)。

3. 以数 k 乘某行(列)加到另一行(列)上去。

以 k 乘 E 的第 j 行加到第 i 行上或以 k 乘 E 的第 i 列加到第 j 列上，得初等矩阵

$$E(ij(k)) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & k & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \end{matrix}$$

验证可知：以 $E_m(ij(k))$ 左乘矩阵 A ，相当于把 A 的第 j 行乘 k 加到第 i 行上 ($r_i + kr_j$)；以 $E_n(ij(k))$ 右乘矩阵 A ，相当于把 A 的第 i 列乘 k 加到第 j 列上 ($c_j + kc_i$)。

综上所述，可得如下定理。

性质1
定理1：设 A 是一个 $m \times n$ 矩阵，对 A 施行一次初等行变换，相当于在 A 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵，对 A 施行一次初等列变换，相当于在 A 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵。

初等变换对应初等矩阵，由初等变换可逆，知初等矩阵可逆，且此初等变换的逆变换也就对应此初等矩阵的逆矩阵。

由变换 $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆变换就是其自身，知 $E(i, j)^{-1} = E(i, j)$ 。

由变换 $r_i \times k$ 的逆变换为 $r_i \times \frac{1}{k}$ ，知 $E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k}))$ 。

由变换 $r_i + kr_j$ 的逆变换为 $r_i + (-k)r_j$ ，知 $E(ij(k))^{-1} = E(ij(-k))$ 。

性质2

定理2：方阵 A 可逆的充分必要条件是存在有限个初等矩阵 $P_1, P_2, \dots, P_l$ ，使 $A = P_1 P_2 \dots P_l$ 。

证明: i 证充分性.

设 $A = P_1 P_2 \cdots P_k$, $\because$ 初等矩阵可逆, 有限个可逆矩阵的乘积仍可逆.

$\therefore A$ 可逆.

ii 再证必要性.

设 n 阶方阵 A 可逆, 且 A 的标准形矩阵为 F .

$\because F \sim A$, 则 F 经有限次初等变换可化为 A .

$\therefore$ 有初等矩阵 $P_1, P_2, \dots, P_k$, 使 $A = P_1 \cdots P_k F P_{k+1} \cdots P_l$.

$\because A$ 可逆, $P_1, \dots, P_l$ 也都可逆. $\therefore$ 标准型矩阵 F 可逆.

假设 $F = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$ 中的 $r < n$, 则 $|F| = 0$, 与 F 可逆矛盾.

$\therefore r = n$ 即 $F = E$. 则 $A = P_1 P_2 \cdots P_l$.

由上述证明可知: 可逆矩阵的标准型矩阵是单位阵.

推论 1: 方阵 A 可逆的充分必要条件是 $A \sim E$.

证: $\because A$ 可逆的充分必要条件是 A 为有限个初等矩阵的乘积,

$$\text{即 } A = P_1 P_2 \cdots P_k = P_1 P_2 \cdots P_k E$$

上式表示 E 经有限次初等行变换可变为 A , 即 $A \sim E$.

推论 2: $m \times n$ 矩阵 A 与 B 等价的充分必要条件是存在 m 阶可逆矩阵 P 及 n 阶可逆矩阵 Q , 使 $PAQ = B$.

由上节例 1: 对于方阵 A , 若 $(A, E) \sim (E, X)$, 则 A 可逆且 $X = A^{-1}$.

证明: 设有 n 阶矩阵 A 及 $n \times s$ 矩阵 B , 求矩阵 X 使 $AX = B$.

若 A 可逆, 则 $X = A^{-1}B$.

当 A 可逆时, 有初等矩阵 $P_1, P_2, \dots, P_k$ 使 $A = P_1 P_2 \cdots P_k$, 则 $A^{-1} = P_k^{-1} \cdots P_1^{-1}$.

记 $P_k^{-1} = Q_k$, 则 Q_k 也是初等矩阵.

则 $Q_1 \cdots Q_l A = E$ (A 经一系列初等行变换化为 E .)

$$Q_1 \cdots Q_l B = Q_1 \cdots Q_l A X = X = A^{-1} B$$

用分块矩阵形式, 以上两式可合并为:

$$Q_1 \cdots Q_l (A, B) = (E, A^{-1} B)$$

即对矩阵 (A, B) 作初等行变换, 把 (A, B) 化成行最简形, 若 (A, B) 的行最简形为 (E, X) , 即 $(A, B) \sim (E, X)$, 则 A 可逆, 且 $X = A^{-1} B$.

当 $B = E$ 时, 若 $(A, E) \sim (E, X)$, 则 A 可逆, 且 $X = A^{-1}$.

以上讨论给出了一种利用初等变换求 A^{-1} 或 $A^{-1} B$ 的方法.

对于 n 个未知数 n 个方程的线性方程组 $Ax = b$,

若增广矩阵 $B = (A, b) \sim (E, x)$, 则系数矩阵 A 可逆, 得 $x = A^{-1} b$ 为方程组的唯一解.

例1. 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$, 求线性方程组

$Ax = b_1$ 和 $Ax = b_2$ 的解.

解. 设 $Ax_1 = b_1$, $Ax_2 = b_2$. 且 $X = (x_1, x_2)$, $B = (b_1, b_2)$, 则矩阵方程 $AX = B$. 为求 X , 把 (A, B) 化成行最简形.

$$(A, B) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 + r_1]{\substack{r_1 \leftrightarrow r_2 \\ r_2 - 2r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 + 3r_2]{\substack{r_3 \times \frac{1}{5} \\ r_3 \leftrightarrow r_2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 - 2r_2 + 2r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A \sim E, \text{ 则 } A \text{ 可逆, 且 } X = A^{-1} B = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

即线性方程组 $Ax = b_1$ 和 $Ax = b_2$ 都有唯一解. $x_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

若 $A \sim B$, 则有可逆矩阵 P , 使 $PA = B$. 那么如何求出 P ?

$$PA = B \Leftrightarrow \begin{cases} PA = B \\ PE = P \end{cases} \Leftrightarrow P(A, E) = (B, P) \Leftrightarrow (A, E) \sim (B, P)$$

即对矩阵 (A, E) 作初等行变换, 当矩阵 A 变为 B 时, E 变为 P .

例1. 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -6 & 2 \end{bmatrix}$ 的行最简形矩阵为 F , 求 F , 并求一个可逆

矩阵 P , 使 $PA = F$.

$$\text{解: } (A, E) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -6 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_1]{\substack{r_1 \leftrightarrow r_2 \\ r_3 - 2r_2 \\ r_3 - 2r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 + 4r_2]{\substack{r_2 - r_1 \\ r_1 - r_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -8 & -3 \end{bmatrix} = (F, P)$$

$$\therefore A \text{ 的行最简形 } F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 可逆矩阵 } P = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 10 & -8 & -3 \end{bmatrix}.$$

例2. 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, 证明 A 可逆, 并求 A^{-1} .

解: $(A, E) \sim (F, P)$, 若 $F = E$ 则 A 可逆, 且 $PA = E$, 则 $P = A^{-1}$.

$$(A, E) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_2]{\substack{r_3 \times 3 \\ r_3 + 2r_2}} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -4 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 + 9r_2]{r_3 \times 2} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 4 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 - r_3]{r_1 + 2r_3} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 18 & 9 & 12 \\ 0 & -2 & 0 & -8 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2 \times (-\frac{1}{2})]{r_1 \times \frac{1}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 4 & 6 \end{bmatrix} = (E, A^{-1}) \quad \because A \sim E \therefore A \text{ 可逆.}$$

例3. 求解矩阵方程 $AX=B$, 其中 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$.

解: 若 A 可逆, 则 $X = A^{-1}B$.

设可逆矩阵 P , 使 $PA = F$ 为行最简形, 则

$$P(A, B) = (F, PB)$$

若 $F = E$, 则 A 可逆, 且 $P = A^{-1}$, 则 $X = PB = A^{-1}B$.

$$(A, B) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 + r_1]{r_1 \leftrightarrow r_2, r_2 + 2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{r_3 \times \frac{1}{5}, r_2 + 3r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 - 2r_2 + 2r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} = (E, A^{-1}B)$$

$\therefore A \sim E \quad \therefore A$ 可逆.

例2. 求解矩阵方程 $AX = A + X$, 其中 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

解: 由 $AX = A + X$ 得 $(A - E)X = A$.

$$(A - E, A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 + 4r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 \times (-1)]{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1 - 2r_2]{r_2 + r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$A - E \sim E$, 则 $A - E$ 可逆.

$$\therefore X = (A - E)^{-1}A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

由以上可知, 可以用初等行变换的方法求 $X = A^{-1}B$.

则求 $X = BA^{-1}$ 可对矩阵 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ 作初等列变换,

使 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} E \\ BA^{-1} \end{pmatrix}$ 即可得 $X = BA^{-1}$.

也可对 (A^T, B^T) 作初等行变换, 使 $(A^T, B^T) \sim (E, (A^T)^{-1}B^T)$

则 $X^T = (A^T)^{-1}B^T$, 从而求得 X .

§3. 矩阵的秩.

$m \times n$ 矩阵 A 的标准形 $F = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}$, 其中 r 就是 A 的行阶梯形矩阵中非零行的行数, 这个数就是矩阵 A 的秩.

定义1: 在 $m \times n$ 矩阵 A 中, 任取 k 行与 k 列 ($k \leq m, k \leq n$), 位于这些行列交叉处的 k^2 个元素, 不改变它们在 A 中所处的位置次序而得的 k 阶行列式, 称为矩阵 A 的 k 阶子式.

定义2: 设在矩阵A中有一个不等于0的 r 阶子式 D , 且所有 $r+1$ 阶子式全等于0, 那么 D 称为矩阵A的最高阶非零子式, 数 r 称为矩阵A的秩, 记作 $R(A)$.

零矩阵的秩等于0.

当矩阵A中有一个不等于0的 r 阶子式, 且所有 $r+1$ 阶子式全等于0, 根据行列式的性质所有高于 $r+1$ 阶的子式此时也全等于0, 因此把 r 阶非零子式称为最高阶非零子式, 而A的秩 $R(A)$ 就是A中不等于0的子式的最高阶数.

注意: 1. 若A为 $m \times n$ 矩阵, 则 $0 \leq R(A) \leq \min\{m, n\}$.

2. $\because |A| = |A^T| \quad \therefore A^T$ 的子式与A的子式对应相等.

$$\therefore R(A) = R(A^T).$$

3. 对于 n 阶矩阵A, 它的 n 阶子式只有一个 $|A|$, 所以当 $|A| \neq 0$ 时 $R(A) = n$, 当 $|A| = 0$ 时 $R(A) < n$. 因此, 可逆矩阵的秩等于矩阵的阶数.

可逆矩阵又称为满秩矩阵, 不可逆矩阵(奇异矩阵)又称降秩矩阵.

例1. 求矩阵A和B的秩, 其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

解: 在A中, 一个2阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, A的3阶子式只有一个 $|A| = 0$, 则 $R(A) = 2$.

B是一个行阶梯形矩阵, 有3个非零行, 则可知B的所有4阶子式全为0.

其三阶子式 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -18 \neq 0$, 则 $R(B) = 3$. (秩等于非零行行数)

当矩阵的行数、列数较高时, 按定义求秩很麻烦. 而对于行阶梯形矩阵它的秩等于非零行的行数. 用初等变换将矩阵化为行阶梯形矩阵即可, 但是它们二者的秩是否相同呢?

定理3: 若 $A \sim B$, 则 $R(A) = R(B)$.

证明: ①先证若A经一次初等行变换变为B, 则 $R(A) \leq R(B)$.

设 $R(A) = r$, 且 A 的某个 r 阶子式 $D \neq 0$.

当 $A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B$ 或 $A \xrightarrow{r_i \times k} B$ 时, 在 B 中总能找到与 D 相对应的 r 阶子式 D_1 ,

$$\therefore D_1 = D \text{ 或 } D_1 = -D \text{ 或 } D_1 = kD$$

$$\therefore D_1 \neq 0 \text{ 则 } R(B) \geq r.$$

当 $A \xrightarrow{r_i + kr_j} B$ 时, 因为变换 $r_i \leftrightarrow r_j$ 时结论成立, 所以只考虑特殊情况 $A \xrightarrow{r_i + kr_i} B$.

分两种情况进行讨论:

i A 的 r 阶非零子式 D 不包含 A 的第一行.

此时 A 的 r 阶非零子式 D 也是 B 的 r 阶非零子式, 则 $R(B) \geq r$.

ii D 包含 A 的第一行.

此时将 B 中与 D 对应的 r 阶子式 D_1 记作:

$$D_1 = \begin{vmatrix} r_1 + kr_i \\ r_p \\ \vdots \\ r_q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_1 \\ r_p \\ \vdots \\ r_q \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} r_i \\ r_p \\ \vdots \\ r_q \end{vmatrix} = D + kD_2$$

当 $p = i$ 时, $D_1 = D \neq 0$; 当 $p \neq i$ 时, D_2 也是 B 的 r 阶子式,

$$\therefore D_1 - kD_2 = D \neq 0 \quad \therefore D_1, D_2 \text{ 不同时为 } 0.$$

$\therefore B$ 中存在 r 阶非零子式 D_1, D_2 , 则 $R(B) \geq r$.

$\therefore A$ 经一次初等行变换变为 B , 则 $R(A) \leq R(B)$.

又 B 也可经一次初等行变换变为 A , 则 $R(B) \leq R(A)$.

$$\therefore R(A) = R(B).$$

经一次初等行变换矩阵的秩不变, 则经有限次初等行变换矩阵的秩也不变.

设 A 经初等列变换变为 B , 则 A^T 经初等行变换变为 B^T .

由以上证明可知, $R(A^T) = R(B^T)$.

$$\text{又 } \because R(A^T) = R(A), R(B^T) = R(B) \quad \therefore R(A) = R(B).$$

$\therefore A$ 经有限次初等变换变为 B (即 $A \sim B$), 则 $R(A) = R(B)$. 证毕.

例2. 设 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, 求矩阵的秩, 并求A的一个最高阶非零子式.

解: $A \xrightarrow[r_4 - 3r_1]{\substack{r_1 \leftrightarrow r_4 \\ r_2 - r_4 \\ r_3 - 2r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -12 & 9 & 7 & -11 \\ 0 & -16 & 12 & 8 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4 - 4r_2]{r_3 - 3r_2} \begin{bmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{r_4 - r_3} \begin{bmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore R(A) = 3.$

A的最高阶非零子式为3阶. 共有 $C_4^3 \cdot C_5^3 = 40$ (个).

记 $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_5)$, 则矩阵 $A_0 = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4)$ 的行阶梯形矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\therefore R(A_0) = 3$, $\therefore A_0$ 中必有3阶非零子式.

$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & 11 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 6 & 11 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0.$

$\therefore$ 这个子式便是A的一个最高阶非零子式.

例3. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 8 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & -6 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, 求矩阵A及矩阵 $B = (A, \vec{b})$ 的秩.

解: $B = (A, \vec{b}) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 8 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & -6 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4 - 3r_1]{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 + 2r_1}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow[r_4 + 3r_3]{\substack{r_2 \times \frac{1}{2} \\ r_3 - r_2}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4 - r_3]{r_3 \times \frac{1}{5}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (\tilde{A}, \tilde{b})$

$\therefore R(A) = 2, R(B) = 3$ 矩阵B对应的线性方程组 $Ax = b$ 无解.

例4. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & \lambda & -1 & 2 \\ 5 & 3 & \mu & 6 \end{bmatrix}$, 已知 $R(A) = 2$, 求 λ 与 μ 的值.

解: $A \xrightarrow[r_3 - 5r_1]{r_2 - 3r_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & \lambda+3 & -4 & -4 \\ 0 & 18 & \mu-5 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & \lambda+3 & -4 & -4 \\ 0 & 5-\lambda & \mu-1 & 0 \end{bmatrix}$

$\because R(A) = 2$

$\therefore \begin{cases} 5-\lambda = 0 \\ \mu-1 = 0 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} \lambda = 5 \\ \mu = 1 \end{cases}$

矩阵的秩的性质:

1. $0 \leq R(A_{m \times n}) \leq \min\{m, n\}$.
2. $R(A^T) = R(A)$
3. 若 $A \sim B$, 则 $R(A) = R(B)$.
4. 若 P, Q 可逆, 则 $R(PAQ) = R(A)$.
5. $\max\{R(A), R(B)\} \leq R(A, B) \leq R(A) + R(B)$.

当 $B = b$ 为列向量时, $R(A) \leq R(A, b) \leq R(A) + 1$.

证明: $\because A$ 的最高阶非零子式是 (A, b) 的非零子式.

$\therefore R(A) \leq R(A, b)$ 同理 $R(b) \leq R(A, b)$

合并两式, 得 $\max\{R(A), R(b)\} \leq R(A, b)$.

设 $R(A) = r$, $R(b) = t$. 将 A 和 b 分别作列变换化为列阶梯形 $\tilde{A}$ 和 $\tilde{b}$, 则 $\tilde{A}$ 和 $\tilde{b}$ 中分别含 r 个和 t 个非零列, 则可设

$A \sim \tilde{A} = (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_r, 0, \dots, 0)$; $B \sim \tilde{B} = (\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_t, 0, \dots, 0)$

则 $(A, b) \sim (\tilde{A}, \tilde{b})$

$\because (\tilde{A}, \tilde{b})$ 中最多含 $r+t$ 个非零列. $\therefore R(\tilde{A}, \tilde{b}) \leq r+t$

又 $\because R(A, b) = R(\tilde{A}, \tilde{b}) \quad \therefore R(A, b) \leq r+t$

即 $R(A, b) \leq R(A) + R(b)$.

例6. 证明: 若 $A_{m \times n} B_{n \times l} = C$, 且 $R(A) = n$, 则 $R(B) = R(C)$.

证: $\because R(A) = n$, 则 A 的行最简形矩阵为 $\begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$.

且有 m 阶可逆矩阵 P , 使 $PA = \begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$.

$$PC = PAB = \begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore R(C) = R(PC) \quad \text{又} \quad R\begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} = R(B)$$

$$\therefore R(B) = R(C).$$

矩阵 A 的秩等于它的列数, 这样的矩阵称为列满秩矩阵.
当 A 为方阵时, 列满秩矩阵就是可逆矩阵.

例6中若 $C = 0$, 则

设 $AB = 0$, 若 A 为列满秩矩阵, 则 $B = 0$. (矩阵乘法消去律)

6. $R(A+B) \leq R(A) + R(B)$.

证明: 设 A, B 为 $m \times n$ 矩阵.

$$(A+B, B) \xrightarrow{(i=1, \dots, n)} (A, B)$$

则 $R(A+B) \leq R(A+B, B) = R(A, B) \leq R(A) + R(B)$.

7. $R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\}$.

8. 若 $A_{m \times n} B_{n \times l} = O$, 则 $R(A) + R(B) \leq n$.

例5. 设 A 为 n 阶矩阵, 证明 $R(A+E) + R(A-E) \geq n$.

证: $\because (A+E) + (E-A) = 2E$

且由性质6, 有 $R(A+E) + R(E-A) \geq R(2E) = n$

又 $\because R(E-A) = R(A-E)$

$\therefore R(A+E) + R(A-E) \geq n$.

§4. 线性方程组的解.

设有 n 个未知数 m 个方程的线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

(1) 式可写为以向量 x 为未知元的向量方程 $A\vec{x} = \vec{b}$ (2)

线性方程组(1)如果有解, 就称它是相容的; 如果无解, 就称它不相容.

定理4. n 元线性方程组 $A\vec{x} = \vec{b}$

i. 无解的充分必要条件是 $R(A) < R(A, \vec{b})$.

ii. 有唯一解的充分必要条件是 $R(A) = R(A, \vec{b}) = n$.

iii. 有无穷多解的充分必要条件是 $R(A) = R(A, \vec{b}) < n$.

证明: $\because$ i, ii, iii 中条件的必要性分别是 (ii)(iii), (i)(iii), (i)(ii) 的充分性的逆否命题. $\therefore$ 只需证明条件的充分性.

2. 对于齐次线性方程组, 则把系数矩阵 A 化成行最简形.

3. 设 $R(A) = R(B) = r$, 把行最简形中 r 个非零行的第一个非零元所对应的未知数取作非自由未知数, 其余 $n-r$ 个未知数取作自由未知数, 令自由未知数分别等于 $c_1, c_2, \dots, c_{n-r}$, 由 B (或 A) 的行最简形, 即可得含 $n-r$ 个参数的通解.

例1. 求解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

解: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 \times (-\frac{1}{3})]{r_3 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow{r_1 - 2r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得 $\begin{cases} x_1 - 2x_3 - \frac{5}{3}x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + \frac{4}{3}x_4 = 0 \end{cases}$ 此方程组与原方程组同解.

得 $\begin{cases} x_1 = 2x_3 + \frac{5}{3}x_4 \\ x_2 = -2x_3 - \frac{4}{3}x_4 \end{cases}$

令 $x_3 = c_1, x_4 = c_2$, 写成向量形式, 得

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

例2. 求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$$

解: $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 3r_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore R(A) = 2, R(B) = 3 \quad \therefore$ 方程组无解.

例3. 求解非齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 4 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 = 0 \end{cases}$$

解: $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 3r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & -6 & -7 & -1 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow[r_2 \times (-\frac{1}{4})]{r_3 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

得
$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 + \frac{5}{4} \\ x_2 = \frac{3}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4 - \frac{1}{4} \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{7}{4} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

($C_1, C_2 \in \mathbb{R}$).

例4. 设有线性方程组
$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda \end{cases}$$

问 λ 取何值时, 此方程组(1)有唯一解; (2)无解; (3)有无限多个解?
并在有无限多解时求其通解.

解法一: $B = \begin{bmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3 \\ 1+\lambda & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow[r_3 - (1+\lambda)r_1]{r_2 - r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda \\ 0 & -\lambda & -\lambda(2+\lambda) & -\lambda(1+\lambda) \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(3+\lambda) & (1-\lambda)(3+\lambda) \end{bmatrix}$

(1) 当 $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq -3$ 时, $R(A) = R(B) = 3$, 方程组有唯一解.

(2) 当 $\lambda = 0$ 时, $R(A) = 1$, $R(B) = 2$, 方程组无解.

(3) 当 $\lambda = -3$ 时, $R(A) = R(B) = 2$, 方程有无限多个解.

此时, $B \xrightarrow{r} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1 - r_2]{r_2 \times (-\frac{1}{3})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

得通解 $\begin{cases} x_1 = x_3 - 1 \\ x_2 = x_3 - 2 \end{cases}$ 取 $x_3 = C$.

即 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (C \in \mathbb{R}).$

解法二: $\because$ 系数矩阵 A 为方阵, $\therefore$ 方程有唯一解的充要条件是 $|A| \neq 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+\lambda & 3+\lambda & 3+\lambda \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix} = (3+\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3+\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (3+\lambda) \lambda^2$$

$\therefore$ 当 $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq -3$ 时, 方程组有唯一解.

当 $\lambda = 0$ 时,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 - r_1]{r_3 - r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \times \frac{1}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则 $R(A) = 1$, $R(B) = 2$, $\therefore$ 方程组无解.

当 $\lambda = -3$ 时,

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 + 2r_1]{r_1 \leftrightarrow r_3, r_2 - r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 \times (-\frac{1}{3})]{r_3 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{则 } R(A) = R(B) = 2.$$

$\therefore$ 方程组有无限多个解.

通解为 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (C \in \mathbb{R}).$

注意: 解法二只适用于系数矩阵为方阵的情形.

定理5: 线性方程组 $A\vec{x} = \vec{b}$ 有解的充分必要条件是 $R(A) = R(A, \vec{b})$.

定理6: n 元齐次线性方程组 $A\vec{x} = 0$ 有非零解的充分必要条件是 $R(A) < n$.

定理7: 矩阵方程 $AX = B$ 有解的充分必要条件是 $R(A) = R(A, B)$.

证明: 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $m \times l$ 矩阵, 则 X 为 $n \times l$ 矩阵.

将 X 和 B 按列分块, 记为 $X = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_l)$, $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_l)$

则矩阵方程 $AX = B$ 等价于 l 个向量方程 $A\vec{x}_i = \vec{b}_i$ ($i = 1, 2, \dots, l$).

i 充分性.

设 $R(A) = R(A, B)$.

$\therefore R(A) \leq R(A, \vec{b}_i) \leq R(A, B) \quad \therefore R(A) = R(A, \vec{b}_i)$

可知 l 个向量方程 $A\vec{x}_i = \vec{b}_i$ ($i = 1, 2, \dots, l$) 都有解.

$\therefore$ 矩阵方程 $AX = B$ 有解.

ii 必要性.

设矩阵方程 $AX = B$ 有解, 则 l 个向量方程 $A\vec{x}_i = \vec{b}_i$ 都有解.

设解为 $\vec{x}_i = \begin{bmatrix} \lambda_{1i} \\ \lambda_{2i} \\ \vdots \\ \lambda_{ni} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, l)$

记 $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$, 则有 $\vec{a}_1 \lambda_{1i} + \vec{a}_2 \lambda_{2i} + \dots + \vec{a}_n \lambda_{ni} = \vec{b}_i$

矩阵 $(A, B) = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_l)$

$$(A, B) \xrightarrow[i=(1, 2, \dots, l)]{C_{n+i} - \lambda_{1i}C_1 - \dots - \lambda_{ni}C_n} (A, 0)$$

$\therefore R(A, B) = R(A)$.

定理8: 设 $AB = C$, 则 $R(C) \leq \min\{R(A), R(B)\}$.

证: $\because AB = C \quad \therefore$ 矩阵方程 $AX = C$ 有解, $X = B$.

由定理7可知, $R(A) = R(A, C)$

又 $\because R(C) \leq R(A, C) \quad \therefore R(C) \leq R(A)$.

$\because B^T A^T = C^T$ 同理可得 $R(C^T) \leq R(B^T)$ 即 $R(C) \leq R(B)$

综合即得 $R(C) \leq \min\{R(A), R(B)\}$.

定理9: 矩阵方程 $A_{m \times n} X_{n \times l} = 0$ 只有零解的充分必要条件是 $R(A) = n$.