第一章 行列式

§1. 二阶与三阶行列式

一. 二元线性方程组与二阶行列式

1. 引例

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & ① \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & ② \end{cases}$$

消元法：① $\times a_{22}$ − ② $\times a_{12}$，得 $(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22}-a_{12}b_2$

−① $\times a_{21}$ + ② $\times a_{11}$，得 $(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2-b_1a_{21}$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，
$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases}$$

2. 二阶行列式

x_1，x_2 中分子、分母都是四个数分两对相乘再相减而得，其中分母是由方程组中四个系数确定的。把这四个数按它们在方程组中的位置排成二行二列的数表（其中横排称行，纵排称列）

$$\begin{array}{cc} & \text{第1列} & \\ \text{第一行} & a_{11} & a_{12} \\ & a_{21} & a_{22} \end{array}$$

则表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为数表所确定的二阶行列式，记作 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

其中 a_{ij}（$i=1,2$；$j=1,2$）称为行列式的元素或元。

第一个下标 i 为行标，第二个下标 j 称为列标。

位于第 i 行第 j 列的元素称为行列式的 (i,j) 元。

3. 对角线法则

$$\begin{vmatrix} a_{11}\ \text{主} & a_{12} \\ a_{21}\ \text{副} & a_{22} \end{vmatrix}$$

实联线称为主对角线。

虚联线称为副对角线。

二阶行列式就是主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积的差值。

则二元线性方程组的解 x_1，x_2 的分子可表示为：

$$b_1 a_{22} - a_{12} b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad a_{11} b_2 - b_1 a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

记作 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

则 $x_1 = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$，$x_2 = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$

例1. 求解二元线性方程组 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$

解：$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-4) = 7 \neq 0$

$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 12 - (-2) = 14$

$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 24 = -21$

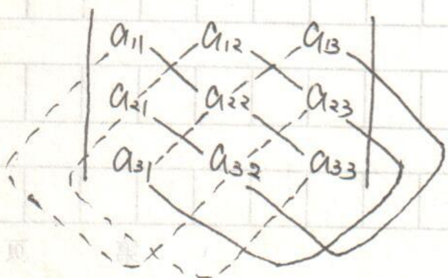
则 $x_1 = \dfrac{D_1}{D} = 2$，$x_2 = \dfrac{D_2}{D} = -3$

二. 三阶行列式：

定义：设有9个数排成3行3列的数表 $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$

记作
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

三阶行列式含有6项，每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号。



实线上三元素乘积为 +

虚线上三元素乘积为 −

对角线法则.

例2. 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&-4\\-2&2&1\\-3&4&-2\end{vmatrix}$

解：由对角线法则，得

$$D=1\times2\times(-2)+2\times1\times(-3)+(-4)\times(-2)\times4$$
$$-(-4)\times2\times(-3)-2\times(-2)\times(-2)-1\times1\times4$$
$$=-4-6+32-24-8-4=-14$$

例3. 求解方程 $\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&x\\4&9&x^2\end{vmatrix}=0$.

解：$D=3x^2+\overset{4x+18}{\cancel{18x+4}}-12-2x^2-9x=x^2-5x+6=0$

得　$x=2$ 或 $x=3$.

§2. 全排列及其逆序数

引例：用1、2、3三个数字，可以组成多少个没有重复数字的三位数？

解：百位：3种放法；十位：2种放法，个位：1种放法.

共有 $3\times2\times1=6$ 种放法.

这6个不同的三位数是：123，231，312，132，213，321

在数学中，把考察的对象，例如上例中的数字1、2、3叫做元素。

对于n个元素，把n个元素（不同的）排成一列，共有几种不同的排法？

把n个不同的元素排成一列，叫做这n个元素的全排列.（简称排列）

n个不同元素的所有排列的种数，通常用 P_n 表示.

$$P_3=3\times2\times1=6$$

$$P_n=n\cdot(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1=n!$$

对于n个不同的元素，先规定各元素之间有一个标准次序，则在这n个元素的任一排列中，当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，则有1个逆序。

一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数。

逆序数为奇数的排列叫做奇排列，逆序数为偶数的排列叫做偶排列。

设n个元素为1至n这n个自然数，并规定由小到大为标准次序。

并设 $p_1p_2\cdots p_n$ 为这n个自然数的一个排列。

考虑元素p_i $(i=1,2,\cdots,n)$，若比p_i大的且排在p_i前的元素有t_i个，就说p_i这个元素的逆序数是t_i。

全体元素的逆序数的总和 $t=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i$ 即为该排列的逆序数

例4. 求排列 32514 的逆序数。

解：$t=t_1+t_2+t_3+t_4+t_5=0+1+0+3+1=5$.

§3. n阶行列式的定义。

三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

上式右边每一项都是三个元素的乘积，这三个元素位于不同的行、不同的列。

任一项除正负号外可以写为：$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$

第一个下标排成标准次序123，第二个下标排成$p_1p_2p_3$，它是1、2、3三个数的某个排列，共有6种。

带正号的三项列标排列是：123，231，312　　偶排列

带负号的三项列标排列是：321，213，132　　奇排列

因此，各项所带的正负号可表示为$(-1)^t$，t为列标排列的逆序数。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

其中t为排列$p_1p_2p_3$的逆序数，$\sum$表示对1、2、3三个数的所有排列$p_1p_2p_3$取和。

定义：设有n^2个数，排成n行n列的数表，作出表中位于不同行不同列的n个数的乘积，并冠以符号$(-1)^t$，得 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$

其中$p_1 p_2\cdots p_n$为自然数$1,2,\cdots,n$的一个排列，t为这个排列的逆序数。这样的排列共有$n!$个，因而共有$n!$项。

所有这$n!$项的代数和 $\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 称为n阶行列式

记作 $$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$ 简记作$\det(\underbrace{a_{ij}}_{\text{行列式的}(i,j)\text{元}})$

例5. 证明n阶行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n;\quad \begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

其中未写出的元素都是0.

证：第一式左端称为对角行列式，结果显然成立。

设$\lambda_i=a_{i,n-i+1}$，则由行列式定义

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^t a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$
$$=(-1)^t\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

其中t为排列$n(n-1)\cdots 2\,1$的逆序数，则

$$t=0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

例6. 证明下三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

证：当 $j>i$ 时，$a_{ij}=0$.

∴ D中可能不为0的元素 a_{ip_i}，其下标有 $p_i \leq i$

即 $p_1 \leq 1$，$p_2 \leq 2$，…，$p_n \leq n$.

所有排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 中，满足上述关系的只有一个排列 $1\,2 \cdots n$

所以D中可能不为0的项只有一项 $(-1)^t a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$.

符号 $(-1)^t = (-1)^0 = 1$

∴ $D = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$

§4. 对换.

在排列中，将任意两个元素对调，其余的元素不动，这种作出新排列的手续叫做对换.

将相邻两个元素对换，叫做相邻对换.

定理1. 一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

证：先证相邻对换的情形.

设排列为 $a_1 \cdots a_l a b b_1 \cdots b_m$，对换 a 与 b

变为 $a_1 \cdots a_l b a b_1 \cdots b_m$

当 $a<b$ 时，对换后 a 的逆序数增加1而 b 的逆序数不变.

当 $a>b$ 时，对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆序数~~增加~~减少1.

∴ 对换后奇偶性不同.

再证一般对换的情形.

设排列为 $a_1 \cdots a_l a b_1 \cdots b_m b c_1 \cdots c_n$，作 m 次相邻对换，变为 $a_1 \cdots a_l a b b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_n$. 再作 $m+1$ 次相邻变换，变为 $a_1 \cdots a_l b b_1 \cdots b_m a c_1 \cdots c_n$ 经过 $2m+1$ 次相邻对换，所以这两个排列的奇偶性相反.

推论：奇排列变成标准排列的对换次数为奇数，偶排列变成标准排列的对换次数为偶数。

证：由定理1可知，对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，而标准排列是偶排列（$t=0$），因而推论成立。

行列式定义的另一种表示法.

对行列式的任一项 $(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}$

其中 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 为自然排列，t 为排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序数

对换元素 a_{ip_i} 与 a_{jp_j}，得 $(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}$

此时，该项的值不变，行标排列与列标排列同时作了一次相应的对换.

设新的行标排列 $1\cdots j\cdots i\cdots n$ 的逆序数为 r，则 r 为奇数。

设新的列标排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数为 t_1，

则 $(-1)^{t_1}=-(-1)^t$ $\quad\therefore (-1)^t=(-1)^{t_1+r}$

$\therefore (-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}=(-1)^{t_1+r}a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}$

行标排列与列标排列的逆序数之和并不改变奇偶性.

于是，经过若干次对换，使：

列标排列 $p_1p_2\cdots p_n$（逆序数为 t）$\rightarrow$ 自然排列（逆序数为0）.

行标排列 自然排列 $\longrightarrow q_1q_2\cdots q_n$（逆序数为 s）

则有，$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=(-1)^s a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}$

定理2. n 阶行列式也可定义为 $D=\sum(-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$，

其中 t 为行标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数.

证：按行列式定义有 $D=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$

记 $D_1=\sum(-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$

由以上讨论可知：对于 D 中的任一项总有且仅有 D_1 中的某一项与之对应并相等；反之对于 D_1 中的任一项也总有且仅有 D 中的某一项与之对应相等，则 $D=D_1$，

§5. 行列式的性质.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 D^T 称为行列式 D 的转置行列式。

性质1. 行列式与它的转置行列式相等。

证. 记 $D=\det(a_{ij})$ 的转置行列式

$$D^T=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

即 D^T 的 (i,j) 元为 b_{ij}，则 $b_{ij}=a_{ji}\ (i,j=1,2\cdots n)$

$$D^T=\Sigma(-1)^t b_{1p_1} b_{2p_2}\cdots b_{np_n}=\Sigma(-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$$

由定理2，有 $D=\Sigma(-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$

$\therefore\quad D^T=D$

性质2. 互换行列式的两行(列)，行列式变号。

证. 设行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

是由行列式 $D=\det(a_{ij})$ 对换 i,j 两行得到，

即当 $k\neq i,j$ 时，$b_{kp}=a_{kp}$

当 $k=i,j$ 时，$b_{ip}=a_{jp}$，$b_{jp}=a_{ip}$

则 $D_1=\Sigma(-1)^t b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n}$

$=\Sigma(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n}$

$=\Sigma(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}$

其中 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 为自然排列，t 为排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序数、

设排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数为 t_1，则 $(-1)^t=-(-1)^{t_1}$.

$\therefore\ D_1=-\sum(-1)^{t_1}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}=-D$

以 r_i 表示行列式的第 i 行，以 c_i 表示行列式的第 i 列。

推论：如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式等于零。

证：$r_i\leftrightarrow r_j$，有 $D=-D$，则 $D=0$.

性质3：行列式中的某一行（列）中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式。 $r_i\times k\ (c_i\times k)$.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\times\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论：行列式中某一行（列）的所有元素的公因子可以提到行列式记号的外面。

性质4：行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式等于零。

性质5：若行列式的某一列（行）的元素都是两数之和，例如第 i 列的元素都是两数之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a_{1i}') & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a_{2i}') & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a_{ni}') & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 D 等于下列两个行列式之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i}' & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i}' & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni}' & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质6：把行列式的某一列（行）的各元素乘以同一数然后加到另一列（行）对应的元素上去，行列式不变。

例如以数k乘第j列加到第i列上(记作 c_i+kc_j)，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{c_i+kc_j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}+ka_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i}+ka_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni}+ka_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (i\neq j)$$

例7. 计算

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

解:

$$D \xlongequal{c_1\leftrightarrow c_2} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4+5r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[②r_4-8r_2]{①r_3+4r_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4+\frac{5}{4}r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = 40$$

例8. 计算

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

解:

$$D \xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4} \begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1\div 6} 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[③r_4-r_1]{①r_2-r_1,\ ②r_3-r_1} 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 48.$$

例9. 计算

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}.$$

解：$D \xlongequal[\substack{②r_3-r_2\\③r_2-r_1}]{①r_4-r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix} \xlongequal[②r_3-r_2]{①r_4-r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{r_4-r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4.$$

注意：各个运算的次序一般不能颠倒。

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+r_2} \begin{vmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-r_1} \begin{vmatrix} a+c & b+d \\ -a & -b \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-r_1} \begin{vmatrix} a & b \\ c-a & d-b \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+r_2} \begin{vmatrix} c & d \\ c-a & d-b \end{vmatrix}$$

此外还要注意 r_i+r_j 与 r_j+r_i 是不同的，r_i+kr_j 不能写作 kr_j+r_i。

例10. 设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} \qquad D_1 = \det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \det(b_{ij}) = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

证明：$D = D_1D_2$.

证：对 D_1 作运算 r_i+kr_j，把 D_1 化为下三角行列式，设为

$$D_1 = \begin{vmatrix} p_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{vmatrix} = p_{11}\cdots p_{kk}$$

对 D_2 作运算 c_i+kc_j，把 D_2 化为下三角形行列式，设为

$$D_2 = \begin{vmatrix} q_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix} = q_{11}\cdots q_{nn}$$

§6. 行列式按行(列)展开.

1. 余子式：在n阶行列式中，把(i,j)元a_{ij}所在的第i行和第j列划去后，留下来的$n-1$阶行列式叫做(i,j)元a_{ij}的余子式，记作M_{ij}。

2. 代数余子式：　$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，A_{ij}叫做(i,j)元a_{ij}的代数余子式。

例：
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$(3,2)$元a_{32}的余子式：
$$M_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-M_{32}$$

引理：一个n阶行列式，如果其中第i行所有元素除(i,j)元a_{ij}外都为零，那么这行列式等于a_{ij}与它的代数余子式的乘积，即
$$D=a_{ij}A_{ij}.$$

证：i $(i,j)=(1,1)$的情形.
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

按例10的结论，则有
$$D=a_{11}M_{11}$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=M_{11} \quad 则 \quad D=a_{11}A_{11}$$

ii 一般情形.
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal[\leftrightarrow r_{i-2}\ \cdots]{r_i\leftrightarrow r_{i-1}} (-1)^{i-1}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal[\leftrightarrow c_{j-2}\ \cdots]{c_j\leftrightarrow c_{j-1}} (-1)^{i-1}(-1)^{j-1}\begin{vmatrix} a_{ij} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & \cdots & a_{1(j-1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2j} & \cdots & a_{2(j-1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & \cdots & a_{n(j-1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}=a_{ij}A_{ij}.$$

行列式按行(列)展开法则.

定理3. 行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和, 即 $D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2\cdots n)$

或 $D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(j=1,2\cdots n)$

证:
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2\cdots n)$$

同理 $D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(j=1,2\cdots n)$

例: 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \underset{c_4+c_3}{\overset{c_1-2c_3}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_2+r_1}{=\!=\!=}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix}\overset{c_1-c_2}{=\!=\!=}\begin{vmatrix} -8 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}=40$$

例12: 证明范德蒙德行列式.

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{n\geq i>j\geq 1}(x_i-x_j) \qquad ①$$

其中记号"$\prod$"表示全体同类因子的乘积。

证：用数学归纳法

$\because \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod\limits_{2 \ge i > j \ge 1} (x_i - x_j)$

$\therefore$ 当 $n=2$ 时 ① 式成立

假设①式对于 $n-1$ 阶范德蒙德行列式成立，证①式对于 n 阶范德蒙德行列式也成立。

设法把 D_n 降阶：从第 n 行开始，后行减去前行的 x_1 倍，得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1) \prod_{n \ge i > j \ge 2} (x_i - x_j)$$

$$= \prod_{n \ge i > j \ge 1} (x_i - x_j)$$

推论：行列式某一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零。即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \ne j)$$

$$\text{或} \quad a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \quad (i \ne j)$$

证：将行列式 $D = \det(a_{ij})$ 按第 j 行展开，

$$a_{j1}A_{j1} + a_{j2}A_{j2} + \cdots + a_{jn}A_{jn} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

将上式中的 a_{jk} 换成 a_{ik} $(k=1,2\cdots n)$，得

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第}i\text{行} \\ \\ \leftarrow \text{第}j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}$$

当 $i\neq j$ 时，$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \quad (i\neq j)$.

同理 $a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \quad (i\neq j)$

3. 代数余子式的重要性质.

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=D\delta_{ij}=\begin{cases}D, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

或 $$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=D\delta_{ij}=\begin{cases}D, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

其中 $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$

行列式 $\det(a_{ij})$ 按第 i 行展开，

$$\det(a_{ij})=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$$

把 $a_{i1}, a_{i2},\cdots a_{in}$ 替换为 $b_1, b_2\cdots b_n$，得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ b_1 & \cdots & b_n \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=b_1A_{i1}+b_2A_{i2}+\cdots+b_nA_{in}$$

类似地，$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj}$$

例13. 设

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix},$$ D 的 (i,j) 元的余子式和代数余子式依次记作 M_{ij} 和 A_{ij}，求：

$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$ 及 $M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}$.

解：

$$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&-5\\-1&3&1&3\\2&-4&-1&-3\end{vmatrix}\overset{r_4+r_3}{\underset{r_3-r_1}{=\!=}}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&-5\\-2&2&0&2\\1&-1&0&0\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&1&-5\\-2&2&2\\1&-1&0\end{vmatrix}\overset{c_2+c_1}{=\!=}\begin{vmatrix}1&2&-5\\-2&0&2\\1&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-5\\0&2\end{vmatrix}=4.$$

$$M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}=A_{11}-A_{21}+A_{31}-A_{41}$$

$$=\begin{vmatrix}1&-5&2&1\\-1&1&0&-5\\1&3&1&3\\-1&-4&-1&-3\end{vmatrix}\overset{r_4+r_3}{=\!=}\begin{vmatrix}1&-5&2&1\\-1&1&0&-5\\1&3&1&3\\0&-1&0&0\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}1&2&1\\-1&0&-5\\1&1&3\end{vmatrix}$$

$$\overset{r_1-2r_3}{=\!=}-\begin{vmatrix}-1&0&-5\\-1&0&-5\\1&1&3\end{vmatrix}=0$$

§7. 克莱默法则

二元线性方程组：$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}$

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\neq0,\quad D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}\\b_2&a_{22}\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1\\a_{21}&b_2\end{vmatrix}$$

则 $x_1=\dfrac{D_1}{D}$, $x_2=\dfrac{D_2}{D}$

含有 n 个未知数 $x_1,x_2\cdots x_n$ 的 n 个线性方程的方程组：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}\qquad(1)$$

克莱默法则：如果线性方程组(1)的系数行列式不等于零，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

那么方程组(1)有唯一解 $x_1=\frac{D_1}{D}$，$x_2=\frac{D_2}{D}$，$\cdots$，$x_n=\frac{D_n}{D}$，

其中 $D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{1,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ $\quad (j=1,2\cdots n)$

例1. 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8 \\ x_1-3x_2-6x_4=9 \\ 2x_2-x_3+2x_4=-5 \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0 \end{cases}$$

解：

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_2]{r_1-2r_2} \begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 & 13 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3+2c_2]{c_1+2c_2} -\begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = 27$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4-2c_2]{c_1+3c_2} \begin{vmatrix} 11 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 12 & 4 & -7 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=-3\cdot\begin{vmatrix} 11 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 12 & -7 & -2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_2-2r_1]{r_3-r_2} -3\cdot\begin{vmatrix} 11 & -5 & -1 \\ -21 & 9 & 0 \\ 11 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} -21 & 9 \\ 11 & -6 \end{vmatrix}$$

$$=3\times(126-99)=81$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2&8&-5&1\\1&9&0&-6\\0&-5&-1&2\\1&0&-7&6\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-r_2]{r_1-2r_2}\begin{vmatrix}0&-10&-5&13\\1&9&0&-6\\0&-5&-1&2\\0&-9&-7&12\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-10&-5&13\\-5&-1&2\\-9&-7&12\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3+2c_2]{c_1-5c_2}-\begin{vmatrix}15&-5&3\\0&-1&0\\26&-7&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}15&3\\26&-2\end{vmatrix}=-30-78=-108$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&1&8&1\\1&-3&9&-6\\0&2&-5&2\\1&4&0&6\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-r_2]{r_1-2r_2}\begin{vmatrix}0&7&-10&13\\1&-3&9&-6\\0&2&-5&2\\0&7&-9&12\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}7&-10&13\\2&-5&2\\7&-9&12\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_2+\frac{5}{2}c_1]{c_3-c_1}-\begin{vmatrix}7&\frac{15}{2}&6\\2&0&0\\7&\frac{17}{2}&5\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}\frac{15}{2}&6\\\frac{17}{2}&5\end{vmatrix}=75-102=-27$$

$$D_4=\begin{vmatrix}2&1&-5&8\\1&-3&0&9\\0&2&-1&-5\\1&4&-7&0\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-r_2]{r_1-2r_2}\begin{vmatrix}0&7&-5&-10\\1&-3&0&9\\0&2&-1&-5\\0&7&-7&-9\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}7&-5&-10\\2&-1&-5\\7&-7&-9\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3-5c_2]{c_1+2c_2}-\begin{vmatrix}-3&-5&15\\0&-1&0\\-7&-7&26\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3&15\\-7&26\end{vmatrix}=-78+105=27$$

$\therefore\ x_1=\frac{D_1}{D}=3$, $x_2=\frac{D_2}{D}=-4$

$x_3=\frac{D_3}{D}=-1$, $x_4=\frac{D_4}{D}=1$

例2. 设曲线 $y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ 通过四点 $(1,3)$、$(2,4)$、$(3,3)$、$(4,-3)$，求系数 a_0、a_1、a_2、a_3.

解：把四个点的坐标代入曲线方程，得

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 3 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 4 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = 3 \\ a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 = -3 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \overset{x_1}{1} & \overset{x_2}{2} & \overset{x_3}{3} & \overset{x_4}{4} \\ \overset{x_1^2}{1} & \overset{x_2^2}{4} & \overset{x_3^2}{9} & \overset{x_4^2}{16} \\ \overset{x_1^3}{1} & \overset{x_2^3}{8} & \overset{x_3^3}{27} & \overset{x_4^3}{64} \end{vmatrix} = \prod_{4 \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j)$$

$$= \overset{3}{(x_4 - x_1)}\overset{2}{(x_4 - x_2)}\overset{1}{(x_4 - x_3)}\overset{2}{(x_3 - x_1)}\overset{1}{(x_3 - x_2)}\overset{1}{(x_2 - x_1)}$$

$$= 12$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 8 \\ 3 & 3 & 9 & 27 \\ -3 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = 36, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & -3 & 16 & 64 \end{vmatrix} = -18$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 27 \\ 1 & 4 & -3 & 64 \end{vmatrix} = 24, \quad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 9 & 3 \\ 1 & 4 & 16 & -3 \end{vmatrix} = -6.$$

得 $a_0 = 3$，$a_1 = -\frac{3}{2}$，$a_2 = 2$，$a_3 = -\frac{1}{2}$

即曲线方程为：$y = 3 - \frac{3}{2}x + 2x^2 - \frac{1}{2}x^3$

定理4：如果线性方程组(1)的系数行列式 $D \neq 0$，则(1)一定有解，且解是惟一的。

定理4的逆否定理：

定理4'：如果线性方程组(1)无解或有两个不同的解，则它的系数行列式必为零。

非齐次线性方程组：常数项 $b_1, b_2 \cdots b_n$ 不全为零的线性方程组。

齐次线性方程组：常数项 $b_1, b_2 \cdots b_n$ 全为零的线性方程组。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 一定是它的解，叫做齐次线性方程组(2)的零解。不全为零的解叫做齐次线性方程组(2)的非零解。

齐次线性方程组一定有零解，但不一定有非零解。

定理5：如果齐次线性方程组(2)的系数行列式 $D \neq 0$，则齐次线性方程组(2)没有非零解。

定理5'：如果齐次线性方程组(2)有非零解，则它的系数行列式必为零。

例3. 问 λ 取何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases} (5-\lambda)x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + (6-\lambda)y = 0 \\ 2x + (4-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

有非零解？

解：

$$D = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 6-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(6-\lambda)(4-\lambda) - 4(4-\lambda) - 4(6-\lambda)$$

$$= (5-\lambda)(2-\lambda)(8-\lambda)$$

$\because D = 0 \quad \therefore \lambda = 5, \lambda = 2$ 或 $\lambda = 8$.