第四章 向量组的线性相关性

一、向量组及其线性组合

定义1 n个有次序的数$a_1, a_2, \cdots, a_n$所组成的数组称为n维向量，这n个数称为该向量的n个分量，第i个数a_i称为第i个分量。

分量全为实数的向量称为实向量；分量为复数的向量称为复向量。

n维向量的写法 $\begin{cases}\text{行向量} \\ \text{列向量}\end{cases}$，规定行向量与列向量都按矩阵的运算规则进行运算。

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad a^T = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

若干个同维数的列向量（或同维数的行向量）所组成的集合叫做向量组。

例如：一个$m \times n$矩阵的全体列向量是一个含n个m维列向量的向量组，而它的全体行向量则是一个含m个n维行向量的向量组。

也就是说把一个矩阵按行(列)分块后就可以得到一组行(列)向量，这些行(列)向量构成了一个行(列)向量组，此时称之为该矩阵的行(列)向量组，矩阵的行(列)向量组都是只含有限个向量的向量组。反过来，一个含有限个向量的向量组也就可以构成一个矩阵。

例如：m个n维列向量所组成的向量组$A: a_1, a_2, \cdots, a_m$构成一个$n \times m$矩阵 $A = (a_1, a_2, \cdots, a_m)$

m个n维行向量所组成的向量组$B: \beta_1^T, \beta_2^T, \cdots, \beta_m^T$构成一个$m \times n$矩阵 $B = \begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \vdots \\ \beta_m^T \end{pmatrix}$

含有限个向量的有序向量组 $\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 矩阵

定义2　给定向量组 $A: a_1, a_2, \cdots, a_m$，对于任何一组实数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，表达式

$$k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots + k_ma_m$$

称为向量组A的一个线性组合，$k_1, k_2, \cdots, k_m$ 称为这个线性组合的系数.

给定向量组 $A: a_1, a_2, \cdots, a_m$ 和向量 b，如果存在一组数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$，使

$$b = \lambda_1a_1 + \lambda_2a_2 + \cdots + \lambda_ma_m,$$

则向量 b 是向量组A的线性组合，这时称向量 b 能由向量组A线性表示.

向量 b 能由向量组A线性表示，也就是方程组

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_ma_m = b$$

有解.

定理1　向量 b 能由向量组 $A: a_1, a_2, \cdots, a_m$ 线性表示的充分必要条件是矩阵 $A = (a_1, a_2, \cdots, a_m)$ 的秩等于矩阵 $B = (a_1, a_2, \cdots, a_m, b)$ 的秩.

定义3　设有两个向量组 $A: a_1, a_2, \cdots, a_m$ 及 $B: b_1, b_2, \cdots, b_l$，若B组中的每个向量都能由向量组A线性表示，则称向量组B能由向量组A线性表示。若向量组A与向量组B能相互线性表示，则称这两个向量组等价.

向量组A和B构成的矩阵记作

$$A = (a_1, a_2, \cdots, a_m) \text{ 和 } B = (b_1, b_2, \cdots, b_l)$$

B组能由A组线性表示，即对每个向量 $b_j\ (j = 1, 2, \cdots, l)$ 存在数 $k_{1j}, k_{2j}, \cdots, k_{mj}$，使

$$b_j = k_{1j}a_1 + k_{2j}a_2 + \cdots + k_{mj}a_m$$

$$= (a_1, a_2, \cdots, a_m)\begin{pmatrix} k_{1j} \\ k_{2j} \\ \vdots \\ k_{mj} \end{pmatrix}$$

从而 $(b_1,b_2,\cdots,b_l)=(a_1,a_2,\cdots,a_m)\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1l} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \cdots & k_{ml} \end{pmatrix}$

矩阵 $K_{m\times l}=(k_{ij})$ 称为该线性表示的系数矩阵.

若存在 $C_{m\times n}=A_{m\times l}B_{l\times n}$，则矩阵C的列向量组能由矩阵A的列向量组线性表示，B为这一表示的系数矩阵

$$(c_1,c_2,\cdots,c_n)=(a_1,a_2,\cdots,a_l)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ln} \end{pmatrix}$$

同时，C的行向量组能由B的行向量组线性表示，此时A为这一表示的系数矩阵

$$\begin{pmatrix} \gamma_1^T \\ \gamma_2^T \\ \vdots \\ \gamma_m^T \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ml} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_l^T \end{pmatrix}$$

从线性表示的角度看待乘积！

$A\overset{r}{\sim}B$ 行向量组相互线性表示 线性方程组同解

$A\overset{c}{\sim}B$ 列向量组相互线性表示

向量组B: $b_1,b_2,\cdots,b_l$ 能由向量组A: $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 线性表示，其涵义是存在矩阵 $K_{m\times l}$，使 $(b_1,\cdots,b_l)=(a_1,\cdots,a_m)K$，即矩阵方程 $(a_1,a_2,\cdots,a_m)X=(b_1,b_2,\cdots,b_l)$ 有解.

定理2 向量组$B: b_1, b_2, \cdots, b_l$能由向量组$A: a_1, a_2, \cdots, a_m$线性表示的充分必要条件是矩阵$A=(a_1, a_2, \cdots, a_m)$的秩等于矩阵$(A, B)=(a_1, \cdots, a_m, b_1, \cdots, b_l)$的秩，即$R(A)=R(A,B)$.

推论 向量组$A: a_1, a_2, \cdots, a_m$与向量组$B: b_1, b_2, \cdots, b_l$等价的充分必要条件是

$$R(A)=R(B)=R(A,B)$$

其中A和B是向量组A和B所构成的矩阵.

例1 证明：即证$A=(a_1, a_2, a_3)$与$B=(A, b)$的秩相等，只须对B施行有限次初等行变换.

要求表达式，即求解

$$(a_1, a_2, a_3)x = b$$

则须将B化为行最简形，可得

$$x = c\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad c\in R.$$

$$\therefore\ b=(a_1, a_2, a_3)x=(-3c+2)a_1+(2c-1)a_2+ca_3.$$

例2 （若时间充足则证）

定理3 设向量组$B: b_1, b_2, \cdots, b_l$能由向量组$A: a_1, a_2, \cdots, a_m$线性表示，则

$$R(b_1, b_2, \cdots, b_l) \leqslant R(a_1, a_2, \cdots, a_m)$$

向量组$B: b_1, b_2, \cdots, b_l$能由向量组$A: a_1, a_2, \cdots, a_m$线性表示

$\Leftrightarrow$ 存在矩阵K，使$B=AK$

$\Leftrightarrow$ 方程$AX=B$有解.

用矩阵语言表述n向问题；
用n向语言解述矩阵表述.

例3　n阶单位矩阵 $E=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ 的列向量叫做n维单位坐标向量.

证明：即 $R(A)=R(A,E)$

$$\left.\begin{array}{l} R(A)=R(A,E) \\ \left.\begin{array}{l} R(A,E)\geqslant R(E) \\ R(A,E)\leqslant n \end{array}\right\} \Rightarrow R(A,E)=n \end{array}\right\} R(A)=n$$

该例结论亦可表述为：

对矩阵 $A_{n\times m}$，存在矩阵 $K_{m\times n}$，使 $AK=E_n$ 的充分必要条件是 $R(A)=n$.

矩阵方程 $A_{n\times m}X=E_n$ 有解的充分必要条件是 $R(A)=n$.

二、向量组的线性相关性

定义4　给定向量组 $A: a_1,a_2,\cdots,a_m$，如果存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使

$$k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_ma_m=0$$

则称向量组A是线性相关的，否则称它是线性无关.

$m=1$，$a=0$ 线性相关；$a\neq 0$ 线性无关.

线性相关性的几何解释：$m=2$ 和 $m=3$ 两种情况.

向量组的线性相关 ⟶ 线性方程组有多余方程

向量组的线性无关 ⟶ 线性方程组无多余方程

如何分析向量组 $A: a_1,a_2,\cdots,a_m$ 的线性相关性，其实可以转化为求解齐次线性方程组 $x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_ma_m=0$ 即 $Ax=0$

若该方程组有非零解，则表示向量组A线性相关.

定理4 向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 线性相关的充分必要条件是它所构成的矩阵 $A=(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ 的秩小于向量个数 m；向量组线性无关的充分必要条件是 $R(A)=m$.

例4 n 维单位坐标向量组的线性相关性.

例5 解：基本思想 向量组构成的矩阵～行阶梯形

例6 证一：求解 $x_1b_1+x_2b_2+x_3b_3=0$

证二：
$$(b_1, b_2, b_3)=(a_1, a_2, a_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

即 $B=AK$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{设 } Bx=0 \Rightarrow A(Kx)=0\\ A\text{的列向量组线性无关}\end{array}\right\}\Rightarrow Kx=0\\ |K|=2\neq 0\end{array}\right\}\Rightarrow x=0$$

即 B 的列向量组 b_1, b_2, b_3 线性无关.

证三：
$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}B=AK\\ |K|\neq 0\end{array}\right\}\Rightarrow R(B)=R(A)\\ A\text{的列向量组线性无关}\Rightarrow R(A)=3\end{array}\right\}\Rightarrow R(B)=3$$

$\Rightarrow$ B 的列向量组 b_1, b_2, b_3 线性无关.

定理5 (1) 若向量组A: $a_1,a_2,\cdots,a_m$线性相关，则向量组B: $a_1,a_2,\cdots,a_m,a_{m+1}$也线性相关。反言之，若向量组$B$线性无关，则向量组$A$也线性无关。

(2) m个n维向量组成的向量组，当维数n小于向量个数m时一定线性相关。特别地，$n+1$个n维向量一定线性相关。

(3) 设向量组A: $a_1,a_2,\cdots,a_m$线性无关，而向量组B: $a_1,\cdots,a_m,b$线性相关，则向量b必能由向量组A线性表示，且表示式是唯一的。

证明：(1) 记 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$，$B=(A,a_{m+1})$

向量组A线性相关 $\Rightarrow R(A)<m$

$\Rightarrow R(B)\leq R(A)+1<m+1$

$\Rightarrow R(B)<m+1$ 即 向量组B线性相关.

注：一个向量组若有线性相关的部分组，则该向量组线性相关。特别地，含零向量的向量组必线性相关。一个向量组若线性无关，则它的任何部分组都线性无关。

(2) 该向量组构成 $A_{n\times m}=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$

$n<m \Rightarrow R(A)\leq n$ 亦有 $R(A)<m$

故m个向量$a_1,\cdots,a_m$线性无关.

(3)
$$\left.\begin{aligned}&B=(A,b),\ R(A)\leq R(B)\\&A\text{线性无关}\Rightarrow R(A)=m\\&B\text{线性相关}\Rightarrow R(B)<m+1\end{aligned}\right\}\Rightarrow m\leq R(B)<m+1 \quad \text{即}\ R(B)=m$$

又 $R(A)=R(B)=m \Rightarrow$ 方程组 $Ax=b$ 有唯一解.

故 向量b能由向量组A线性表示且表示式是唯一的.

例7 证明:(1) $\left.\begin{array}{r} a_2, a_3, a_4 \text{线性无关} \Rightarrow a_2, a_3 \text{线性无关} \\ a_1, a_2, a_3 \text{线性相关} \end{array}\right\}$

$\Rightarrow a_1$能由a_2, a_3线性表示。

(2) 反证法.

$\left.\begin{array}{r} \text{假设 } a_4 \text{能由} a_1, a_2, a_3 \text{线性表示} \\ a_1 \text{能由} a_2, a_3 \text{线性表示} \end{array}\right\} \Rightarrow a_4$能由$a_2, a_3$线性表示.

$\Rightarrow a_2, a_3, a_4$线性相关.

与已知矛盾.

三、向量组的秩

定义5 设有向量组A,如果在A中能够选出r个向量$a_1, a_2, \cdots, a_r$,满足

(i) 向量组A_0:$a_1, a_2, \cdots, a_r$线性无关;

(ii) 向量组A中任意$r+1$个向量(若A中有$r+1$个向量的话)都线性相关.

那么,称向量组A_0是向量组A的一个最大线性无关向量组(简称最大无关组),最大无关组所含向量个数r称为向量组A的秩,记作R_A.

只含零向量的向量组没有最大无关组,规定它的秩为0.

与矩阵的秩的定义相比较,可以想到

向量组A的秩 = 向量组A构成矩阵的秩

定理6 矩阵的秩等于它的列向量组的秩,也等于它的行向量组的秩.

用向量组研究矩阵问题.

证明:(略) 最高阶非零子式D_r所在的r列是A的列向量组的一个最大无关组;行亦然。

向量组的最大无关组一般是不唯一的 $\Longleftrightarrow$ 最高阶非零子式一般不唯一.

例8 全体n维向量构成的向量组记作 R^n.

例4中已证明 n维单位坐标向量构成的向量组 $E: e_1, e_2, \cdots, e_n$

是线性无关的; R^n 中任意 n+1个向量都线性相关.

故 E是 R^n 的一个最大无关组, R^n 的秩等于n.

实际上 R^n 的最大无关组很多,任何n个线性无关的n维向量都是

R^n 的最大无关组.

向量组A和它自己的最大无关组 A_0 是等价的

推论(最大无关组的等价定义) 设向量组 $A_0: a_1, a_2, \cdots, a_r$ 是向量组A

的一个部分组,且满足

(i) 向量组 A_0 线性无关;

(ii) 向量组A的任一向量都能由向量组 A_0 线性表示,

那么向量组 A_0 便是向量组A的一个最大无关组.

例9 解: 先求解方程

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&-2\\2&3&0&-1\\1&-1&-5&7\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&1&-2\\0&-1&-2&3\\0&-3&-6&9\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-3r_2\\ r_2\times(-1)}]{r_1+2r_2}\begin{pmatrix}1&0&-3&4\\0&1&2&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

得 $\begin{cases}x_1=3x_3-4x_4\\x_2=-2x_3+3x_4\end{cases}$ 令 $x_3=c_1, x_4=c_2$,

得通解 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}3\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-4\\3\\0\\1\end{pmatrix}$, $c_1, c_2\in R$

记作 $x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2$，知

$$S = \{ x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 \mid c_1、c_2 \in R \}$$

即 S 能由向量组 ξ_1 和 ξ_2 线性表示，而 ξ_1 和 ξ_2 的四个分量不成比例，

故 ξ_1, ξ_2 线性无关，则 ξ_1, ξ_2 是 S 的最大无关组，故 $R_S = 2$.

向量组 $A: a_1, a_2, \cdots, a_m$ 构成的矩阵 $A = (a_1, a_2, \cdots, a_m)$

$$R_A = R(a_1, a_2, \cdots, a_m) = R(A)$$

定理2′ 向量组 $b_1, b_2, \cdots, b_l$ 能由向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 线性表示的充分必要条件是 $R(a_1, a_2, \cdots, a_m) = R(a_1, a_2, \cdots, a_m, b_1, b_2, \cdots, b_l)$.

定理3′ 若向量组 B 能由向量组 A 线性表示，则 $R_B \leq R_A$

证明：设 $R_A = s$，$R_B = t$，则可设 A 和 B 的最大无关组为

$A_0: a_1, a_2, \cdots, a_s$ 和 $B_0: b_1, b_2, \cdots, b_t$，

存在
$$\left.\begin{aligned} B_0 &= BK_1 \\ B &= AK_2 \\ A &= A_0K_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow B_0 = A_0K \Rightarrow R(b_1, \cdots, b_t) \leq R(a_1, \cdots, a_s)$$

即 $t \leq s$

例10 证明（略）定理2及其推论.

例11 解：$A \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $R(A)=3$

$(a_1, a_2, a_4) \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ a_1, a_2, a_4 线性无关

故 a_1, a_2, a_4 是列向量组的一个最大无关组。

为把 a_3, a_5 用 a_1, a_2, a_4 线性表示，把A化为行最简形，即

$$A \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv B = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$$

$Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解 $\Rightarrow$ 向量 $a_1, \cdots, a_5$ 与 $b_1, \cdots, b_5$ 有相同的线性关系

$$\because b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -b_1 - b_2$$

$b_5 = 4b_1 + 3b_2 - 3b_4$

$\therefore a_3 = -a_1 - a_2$

$a_5 = 4a_1 + 3a_2 - 3a_4$

矩阵 $A_{m\times n}$ 与 $B_{l\times n}$ 的行向量组等价，则方程 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解。A的列向量组各向量之间与B的列向量组各向量之间有相同的线性关系。

课外作业：P_{106}（第五版）习题四

1, 3, 4(1), 6, 9, 11(1), 12(1), 13.

上一章我们用初等行变换的方法求解了线性方程组，并得到了一些定理。这一节，我们用向量组线性相关性的理论来讨论线性方程组的解。

四、线性方程组的解的结构

1. 齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

记 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

向量形式

$$Ax = 0 \qquad (2)$$

若 $x_1 = \xi_{11}, x_2 = \xi_{21}, \cdots, x_n = \xi_{n1}$ 为 (1) 的解，则

$$x = \xi_1 = \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \\ \vdots \\ \xi_{n1} \end{pmatrix}$$

称为方程组 (1) 的解向量，即向量方程 (2) 的解。

針对向量方程，讨论解向量的性质.

性质1 若 $x = \xi_1$，$x = \xi_2$ 为 (2) 的解，则 $x = \xi_1 + \xi_2$ 也是 (2) 的解.

性质2 若 $x = \xi_1$ 为 (2) 的解，k 为实数，则 $x = k\xi_1$ 也是 (2) 的解.

口头：若全体解所组成的集合记作 S，如果能求得解集 S 的一个最大无关组 S_0：$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_t$，那么方程 (2) 的任一解都可由最大无关组 S_0 线性表示.
另一方面，最大无关组 S_0 的任何线性组合 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_t\xi_t$ 都是方程 (2) 的解，因此是通解。

齐次线性方程组的解集的最大无关组称为该齐次线性方程组的基础解系.

换句话说，要求齐次线性方程组的通解，只需求出它的基础解系。

设方程组(1)的系数矩阵A的秩为r，不妨设A的前r列向量线性无关，于是A的行最简形矩阵为

$$B=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{r,n-r} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

对应方程组

$$\begin{cases} x_1=-b_{11}x_{r+1}-\cdots-b_{1,n-r}x_n \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ x_r=-b_{r1}x_{r+1}-\cdots-b_{r,n-r}x_n \end{cases} \qquad (3)$$

把 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 作为自由未知数，并令为 $c_1,\cdots,c_{n-r}$，则通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+\cdots+c_{n-r}\begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

记作

$$x=c_1\xi_1+c_2\xi_2+\cdots+c_{n-r}\xi_{n-r}$$

从而，解集S中的任一向量x能由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性表示（因为是通解）

另一方面，矩阵 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r})$ 中有 $n-r$ 阶子式 $|E_{n-r}|\neq 0$，故

$R(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r})=n-r$，所以 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_2$ 线性无关。

综上，根据最大无关组的等价定义，即知 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是解集S的最大无关组，

即 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是方程组(1)的基础解系.（向量组的角度）

在前面的讨论中，我们是先求出齐次线性方程组的通解，再由通解求得基础解系。其实我们也可以先求出基础解系，再写出通解。即在得到(3)后，取 $n-r$ 组数

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$，则相应得到

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \end{pmatrix}$$

将两者合并可得基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \xi_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

定理7　设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩 $R(A)=r$，则 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解集 S 的秩 $R_S=n-r$.

$R(A)=n$，只有零解，没有基础解系；

$R(A)=r<n$，基础解系含 $n-r$ 个向量。

由最大无关组的性质可知，方程组(1)的任何 $n-r$ 个线性无关的解都可构成它的基础解系，所以基础解系并不是唯一的，同样通解的形式也不是唯一的。

例12　解：先求出基础解系，再写出通解.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & 3 & 2 \\ 7 & -7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 得 $\begin{cases} x_1 = \frac{2}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_4 \\ x_2 = \frac{5}{7}x_3 + \frac{4}{7}x_4 \end{cases}$

令 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，则 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{5}{7} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix}$，得基础解系

$\xi_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{5}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$　从而通解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{5}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$c_1、c_2 \in R$

显然，也可取 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，对应有 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} \\ \frac{9}{7} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix}$

亦可得基础解系

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} \\ \frac{9}{7} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

从而通解也可写为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} \frac{5}{7} \\ \frac{9}{7} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad k_1、k_2 \in R$$

向量组 ξ_1, ξ_2 和 η_1, η_2 等价（课后验证）.

P99（第五版）取 x_1, x_2 为自由未知数作为课后练习，思考"取"的意义！

例13 $A_{m\times n}B_{n\times l} = 0$ 证明 $R(A)+R(B) \leq n$.（证略）

证明：记 $B=(b_1, b_2, \cdots, b_l)$，则

$$A(b_1, b_2, \cdots, b_l) = 0$$

$$\Rightarrow Ab_i = 0 \quad (i=1,2,\cdots,l)$$

表明 B 的 l 个列向量都是齐次方程 $Ax=0$ 解，若记解集 S，则 $b_i \in S$

由于 $R(b_1, b_2, \cdots, b_l) \leq R_S$ 即 $R(B) \leq R_S$

根据定理7，$R(A)+R_S = n$，故 $R(A)+R(B) \leq n$.

例14（证略）矩阵 $A_{m\times n}$ 与 $B_{l\times n}$ 的行向量组等价的充分必要条件是齐次方程组 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解.

例15（证略）

2、非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (4)$$

写成向量方程

$$Ax = b \qquad (5)$$

(5)的解即(4)的解向量。

性质3 设 $x=\eta_1$ 及 $x=\eta_2$ 都是(5)的解，则 $x=\eta_1-\eta_2$ 为对应的齐次线性方程组

$$Ax = 0 \qquad (6)$$

的解。

性质4 设 $x=\eta$ 是方程(5)的解，$x=\xi$ 是方程(6)的解，则 $x=\xi+\eta$ 仍是方程(5)的解。

若方程(6)的通解为 $x=k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$，则方程(5)的任一解总可表示为

$$x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} + \eta^*$$

即方程(5)的通解，其中 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 是方程组(6)的基础解系。

例16 解：$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\substack{r_2\times\frac{1}{2} \\ r_3+r_2}]{r_1-r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad R(A)=R(B)=2$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + \frac{1}{2} \\ x_3 = 2x_4 + \frac{1}{2} \end{cases}$$

取 $x_2=x_4=0$，则 $x_1=x_3=\frac{1}{2}$，得方程组的一个解 $\eta^*=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

在对应的齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 \\ x_3 = 2x_4 \end{cases}$ 中，取

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 则 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

则齐次线性方程组的基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in R$$

五、向量空间

n维向量的全体所构成的集合 R^n 叫做n维向量空间。

定义6 设V为n维向量的集合，如果集合V非空，且集合V对于加法及乘数两种运算封闭，那么就称集合V为向量空间。

封闭：若 $a \in V$，$b \in V$，则 $a+b \in V$；

若 $a \in V$，$\lambda \in R$，则 $\lambda a \in V$。

例18 向量空间

例19 非向量空间

例20 齐次线性方程组的解集是一个向量空间，即称为齐次线性方程组的解空间。

例21 非齐次线性方程组的解集不是向量空间。

例22 设a，b为已知的n维向量，可验证集合 $L = \{x = \lambda a + \mu b \mid \lambda, \mu \in R\}$ 是一个向量空间，这个向量空间称为由向量a，b所生成的向量空间。

一般地，由向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 所生成的向量空间为

$$L = \{x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_m a_m \mid \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \in R\}.$$

例23 等价的向量组所生成的向量空间相等.

定义7 设V为向量空间,如果r个向量$a_1, a_2, \cdots, a_r \in V$,且满足

(i) $a_1, a_2, \cdots, a_r$线性无关;

(ii) V中任一向量都可由$a_1, a_2, \cdots, a_r$线性表示,

那么,向量组$a_1, a_2, \cdots, a_r$就称为向量空间V的一个基,r称为向量空间V的维数,并称V为r维向量空间.

如果向量空间V没有基,那么V的维数为0.

0维向量空间只含一个零向量.

定义8 如果在向量空间V中取定一个基$a_1, a_2, \cdots, a_r$,那么V中任何一个向量x可唯一地表示为

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_r a_r,$$

数组$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$称为向量x在基$a_1, a_2, \cdots, a_r$中的坐标.

特别地,在n维向量空间R^n中取单位坐标向量组$e_1, e_2, \cdots, e_n$为基,则以$x_1, x_2, \cdots, x_n$为分量的向量x,可表示为

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n,$$

向量在基$e_1, e_2, \cdots, e_n$中的坐标就是该向量的分量.因此,$e_1, e_2, \cdots, e_n$叫做R^n的自然基.

例24 解:要证a_1, a_2, a_3是R^3的一个基,只须证a_1, a_2, a_3线性无关

要求b_1, b_2在这个基中的坐标,只须设

$$\begin{aligned} b_1 &= x_{11}a_1 + x_{21}a_2 + x_{31}a_3 \\ b_2 &= x_{12}a_1 + x_{22}a_2 + x_{32}a_3 \end{aligned} \quad 即\ (b_1, b_2) = (a_1, a_2, a_3)\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix}$$

只须构造$(A, B) \xrightarrow{r} (E, X)$即可.

例25　R^3中取两个基：a_1, a_2, a_3和b_1, b_2, b_3

(i) 求基变换公式：用a_1, a_2, a_3表示b_1, b_2, b_3的表示式。

(ii) 求坐标变换公式：向量在两个基中的坐标之间的关系式。

解：设$A=(a_1, a_2, a_3)$，$B=(b_1, b_2, b_3)$

(i)　$(a_1, a_2, a_3)=(e_1, e_2, e_3)A$

$$\left.\begin{aligned}\Rightarrow (e_1, e_2, e_3) &= (a_1, a_2, a_3)A^{-1}\\ (b_1, b_2, b_3) &= (e_1, e_2, e_3)B\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow (b_1, b_2, b_3) = (a_1, a_2, a_3)A^{-1}B$$

若记$P=A^{-1}B$，则

$$(b_1, b_2, b_3)=(a_1, a_2, a_3)P$$

其中表示式的系数矩阵$P=A^{-1}B$称为从旧基到新基的过渡矩阵。

(ii) 设向量x在旧基和新基中坐标分别为

y_1, y_2, y_3和z_1, z_2, z_3，即

$$x=(a_1, a_2, a_3)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},\quad x=(b_1, b_2, b_3)\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}$$

故　$A\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_2\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}$，得

$$\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}=B^{-1}A\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

即　$\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$　此即从旧坐标到新坐标的坐标变换公式。

课后作业：20(1), 22, 26(1), 36, 38