

第三章 矩阵的初等变换与线性方程组

前面的内容都只涉及特殊的线性方程组的求解,这一章我们就来学习一般线性方程组的求解.

首先,我们仍然使用消元法求解一个线性方程组.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & ① \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ② \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, & ③ \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. & ④ \end{cases} \quad (I)$$

解: (I) $\begin{matrix} ① \leftrightarrow ② \\ ③ \div 2 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & ② \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2, & ③ \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9, & ④ \end{cases} \quad (B_1)$

$\begin{matrix} ② - ③ \\ ③ - 2① \\ ④ - 3① \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, & ② \\ -5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6, & ③ \\ 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3, & ④ \end{cases} \quad (B_2)$

$② \times \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, & ② \\ -5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6, & ③ \\ 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3, & ④ \end{cases}$

$\begin{matrix} ③ + 5② \\ ④ - 3② \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, & ② \\ 2x_4 = -6, & ③ \\ x_4 = -3, & ④ \end{cases} \quad (B_3)$

解线性方程组

$$\begin{array}{l} \textcircled{3} \leftrightarrow \textcircled{4} \\ \longrightarrow \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \quad \textcircled{1} \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, \quad \textcircled{2} \\ x_4 = -3, \quad \textcircled{3} \\ 2x_4 = -6, \quad \textcircled{4} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \textcircled{4} - 2\textcircled{3} \\ \longrightarrow \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \quad \textcircled{1} \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, \quad \textcircled{2} \\ x_4 = -3, \quad \textcircled{3} \\ 0 = 0, \quad \textcircled{4} \end{array} \right. \quad (B_4)$$

4个未知数3个有效方程，应有一个自由未知数，选 x_3 为自由未知数，

则

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_3 + 4 \\ x_2 = x_3 + 3 \\ x_4 = -3 \end{array} \right. \quad \text{其中 } x_3 \text{ 可取任意值.}$$

或写成

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = c + 4 \\ x_2 = c + 3 \\ x_3 = c \\ x_4 = -3 \end{array} \right. \iff x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+4 \\ c+3 \\ c \\ -3 \end{pmatrix}$$

即

$$x = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } c \text{ 为任意常数.}$$

回顾消元过程，方程组始终被看成一个整体，并涉及三种变换：

(i) 交换方程次序： $\textcircled{i} \leftrightarrow \textcircled{j}$

(ii) 以不等于0的数乘某个方程： $\textcircled{i} \times k$

(iii) 一个方程加上另一个方程的 k 倍： $\textcircled{i} + k\textcircled{j}$

并且这三种变换均可逆。

变换前后，方程组的解不变。因此，这些变换是方程组的同解变换。

变换过程只对方程组的系数和常数进行运算,这一运算过程能否用矩阵的形式重新表述?即方程组的同解变换能否用矩阵表述?

记方程组(1)的增广矩阵为

$$B = (A, b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

本节引入矩阵另一类运算

一、矩阵的初等变换

定义1 矩阵的初等行变换

- (i) 对调两行 (对调 i, j 两行, 记作 $r_i \leftrightarrow r_j$)
- (ii) 以数 $k \neq 0$ 乘某一行中的所有元素 (第 i 行乘 k , 记作 $r_i \times k$)
- (iii) 把某一行所有元素的 k 倍加到另一行对应的元素上去 (第 j 行的 k 倍加到第 i 行上, 记作 $r_i + kr_j$)

初等列变换 (略) 记号换成 c .

统称初等变换. 三种初等变换都是可逆的.

如果矩阵 A 经有限次初等行变换变成矩阵 B , 就称矩阵 A 与 B 行等价, 记作 $A \sim_r B$.

—— 列 ——, —— 列等价, 记作 $A \sim_c B$.

—— 初等变换 ——, —— 等价, 记作 $A \sim B$.

矩阵等价关系的性质:

- (i) 反身性: $A \sim A$.
- (ii) 对称性: 若 $A \sim B$, 则 $B \sim A$.
- (iii) 传递性: 若 $A \sim B, B \sim C$, 则 $A \sim C$.

解线性方程组的初等变换

下面我们就用矩阵的初等变换来解方程组(1),

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} r_1 \leftrightarrow r_2 \\ r_3 \div 2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} = B_1$$

$$\begin{array}{l} r_2 - r_1 \\ r_3 - 2r_1 \\ r_4 - 3r_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -3 \end{pmatrix} = B_2$$

$$r_2 \div 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} r_3 + 5r_2 \\ r_4 - 3r_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = B_3$$

$$r_3 \leftrightarrow r_4 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$r_4 - 2r_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_4$$

$$\begin{array}{l} r_1 - r_2 \\ r_2 - r_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_5$$

解线性方程组

B_5 对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 4 \\ x_2 - x_3 = 3 \\ x_4 = -3 \end{cases}$$

若取 x_3 为自由未知数, 并令 $x_3 = c$, 则

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+4 \\ c+3 \\ c \\ -3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

其中 c 为任意常数.

与增广矩阵 B 等价的 B_4 和 B_5 都称为行阶梯形矩阵, 其特点是:

(i) 阶梯线下方元素全为 0; (ii) 每个台阶只有一行 (台阶数即非零行的行数).

行阶梯形矩阵 B_5 还称为行最简形矩阵, 其特点是:

(i) 非零行的第一个非零元为 1; (ii) 非零元 1 所在列的其它元素都为 0.

基本思想: 解线性方程组 $\Rightarrow$ 增广矩阵化为行最简形矩阵. (数学形式变换的一致性)

一般而言, 对于任何矩阵 $A_{m \times n}$, 总可经过有限次初等行变换把它变为行阶梯形矩阵和行最简形矩阵.

若对行最简形矩阵再施以初等列变换, 则可得到标准形.

注: 化为标准形与求解线性方程组无关!

解线性方程组的初等变换

$$B_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_3 \leftrightarrow C_4 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} C_4 + C_1 + C_2 \\ C_5 - 4C_1 - 3C_2 + 3C_3 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = F$$

标准形的特点：F的左上角是一个单位矩阵，其余元素全为0。

一般而言，对于任何矩阵 $A_{m \times n}$ ，总可经过初等变换把它化为

标准形

$$F = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$$

其中 r 为行阶梯矩阵中非零行的行数。

$$\text{即} \quad A_{m \times n} \sim F_{m \times n} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$$

所有与 $A_{m \times n}$ 等价的矩阵组成的集合称为矩阵 A 的等价类。

标准形 F 是矩阵 A 的等价类中形式最简单的！

解线性方程组的初等变换

上一节我们根据线性方程组的同解变换, 定义了矩阵的初等变换, 包括初等行(列)变换三类三种, 并且发现任何一个矩阵经过有限次初等行变换都可以化为行阶梯形矩阵, 进而还可以化成行最简形矩阵, 即

$$A_{m \times n} \sim \text{行阶梯形矩阵} \sim \text{行最简形矩阵} \sim \text{标准形 } F_{m \times n} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$$

等价类 $\{X | X \sim A\}$.

二、初等矩阵 (初等变换的矩阵表述)

定义2 由单位阵 E 经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵.

三种初等变换对应着三种初等矩阵.

1. 对调两行或两列 ($r_i \leftrightarrow r_j$ 或 $c_i \leftrightarrow c_j$)

$$E(i, j) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

(Note: The matrix above is a simplified representation of the permutation matrix. The original image shows a matrix with 1s on the diagonal and 1s at positions (i, j) and (j, i), with 0s elsewhere. The original image also has pink lines connecting the rows i and j.)

效果:

$$\text{左乘 } E_m(i, j) A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{ji} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\text{右乘 } A_{m \times n} E_n(i, j) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{mi} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

解 题 备 考 题 七 第 六 题

性质1 设 A 是一个 $m \times n$ 矩阵, 对 A 施行一次初等行变换, 相当于在 A 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵; 对 A 施行一次初等列变换, 相当于在 A 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵.

初等矩阵都是可逆的, 且

$$E(i, j)^{-1} = E(i, j)$$

$$E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k}))$$

$$E(ij(k))^{-1} = E(ij(-k))$$

性质2 方阵 A 可逆的充分必要条件是存在有限个初等矩阵 $P_1, P_2, \dots, P_l$, 使 $A = P_1 P_2 \dots P_l$

证明: (i) 充分性

$$\left. \begin{array}{l} A = P_1 P_2 \dots P_l \\ \text{初等矩阵 } P_1, P_2, \dots, P_l \text{ 可逆} \end{array} \right\} \Rightarrow A \text{ 可逆}$$

(ii) 必要性

设 A 的标准形为 F , 即 $F \sim A$ 表示 F 经有限次初等变换可化为 A , 亦即存在 $P_1, P_2, \dots, P_l$ 使

$$\left. \begin{array}{l} A = P_1 \dots P_s F P_{s+1} \dots P_l \\ A \text{ 可逆, } P_1, P_2, \dots, P_l \text{ 可逆} \end{array} \right\} \Rightarrow F \text{ 可逆}$$

可逆矩阵的行最简形

和标准形都是单位阵.

而 $F = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$ 通过反证: 若设 $r < n$, 则 $|F| = 0$ 与 F 可逆矛盾

$$\Rightarrow r = n \text{ 即 } F = E$$

$$\text{从而, } A = P_1 P_2 \dots P_l$$

解 题 备 考 题 大 师 讲 义

定理1 设 A 与 B 为 $m \times n$ 矩阵, 那么

(i) $A \sim B$ 的充分必要条件是存在 m 阶可逆矩阵 P , 使 $PA = B$;

(ii) $A \sim B$ 的充分必要条件是存在 n 阶可逆矩阵 Q , 使 $AQ = B$;

(iii) $A \sim B$ 的充分必要条件是存在 m 阶可逆矩阵 P 及 n 阶可逆矩阵 Q , 使 $PAQ = B$

证明 (略) P_{63}

推论 方阵 A 可逆的充分必要条件是 $A \sim E$.

证明: A 可逆 $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 P , 使 $PA = E$

$$\Leftrightarrow A \sim E$$

或使用性质2

$$A \text{ 可逆} \Leftrightarrow A = P_1 P_2 \cdots P_k \Leftrightarrow A = P_1 P_2 \cdots P_k E$$

$$\Leftrightarrow A \sim E$$

定理1表明 $A \sim B$ 即 A 经一系列初等行变换变为 B , 则有可逆矩阵 P ,

使 $PA = B$. 可逆矩阵 P 如何去求?

$$\text{构造法: } \left. \begin{array}{l} PA = B \\ PE = P \end{array} \right\} \Leftrightarrow P(A, E) = (B, P) \Leftrightarrow (A, E) \sim (B, P)$$

表明若对矩阵 (A, E) 作初等行变换, 则当 A 变为 B 时, E 就变为 P , 即得到可逆矩阵 P .

类似思想可用于求可逆矩阵 Q (课后思考!).

解线性方程组

例1 求 P , 使 $PA = F$. (此题 F 为行最简形矩阵)

解: 构造 $(A, E) \xrightarrow{r} (F, P)$ (过程为板书)

*注: 使 $PA = F$ 的可逆矩阵不是唯一的, 即 P 不唯一! (F 存在零行)

例2 解: 构造 $(A, E) \xrightarrow{r} (B, P) \Leftrightarrow PA = B$

若 $B = E$, 则 A 可逆, 且 $P = A^{-1}$

(化简过程见板书)

例3 求解矩阵方程 $AX = B$. (此处使用初等变换方法)

解: 构造思路 $\underline{PA}X = \underline{PB}$ 若 $PA = E$, 则存在唯一解且 $X = PB$

$$(A, B) \xrightarrow{r} (E, X) \Leftrightarrow P(A, B) = (E, X) \quad \text{即 } X = A^{-1}B$$

同理若求解线性方程组 $Ax = b$, 则可构造

$$(A, b) \xrightarrow{r} (E, x) \Leftrightarrow P(A, b) = (E, x) \quad x = A^{-1}b \text{ (唯一解)}$$

上述 (A, B) 和 (A, b) 都可称为增广矩阵.

课后作业: P_{78} (第五题)

1.(2),(4), 2, 4.(2), 5.(1),(2), 6

解 题 备 考 题 之 矩 阵

三. 矩阵的秩 (一个不变量)

定义3 在 $m \times n$ 矩阵 A 中, 任取 k 行和 k 列 ($k \leq m, k \leq n$), 位于这些行列交叉处的 k^2 个元素, 不改变它们在 A 中所处的位置次序而得到的 k 阶行列式, 称为 矩阵 A 的 k 阶子式.

$m \times n$ 矩阵的 k 阶子式共有 $C_m^k \cdot C_n^k$ 个.

定义4 设在矩阵 A 中有一个不等于 0 的 r 阶子式 D , 且所有 $r+1$ 阶子式 (如果存在的话) 全等于 0, 那么 D 称为 矩阵 A 的最高阶非零子式, 数 r 称为 矩阵 A 的秩, 记作 $R(A)$. 并规定零矩阵的秩等于 0.

即 $R(A)$ 是 A 中非零子式的最高阶数.

一般而言, 对于 $A_{m \times n}$ 有 $0 \leq R(A) \leq \min\{m, n\}$.

$$R(A^T) = R(A)$$

对于 n 阶矩阵 A , $|A| \neq 0 \Leftrightarrow R(A) = n$ 满秩矩阵

$|A| = 0 \Leftrightarrow R(A) < n$ 降秩矩阵

P66 例4. 使用“定义法”, 子式阶数从高到低, 寻找最高阶非零子式.

从例题可知, 对于一般的矩阵, 当行数与列数较高时, 按定义求秩是很麻烦的. 然而对于行阶梯形矩阵, 它的秩就等于非零行的行数.

此处的等价变换
就是指初等变换.

定理2 若 $A \sim B$, 则 $R(A) = R(B)$ 证明略, 课后阅读!

定理2 告诉我们等价的两个矩阵具有一个不变量: 矩阵的秩不变 或者说 等价变换不改变矩阵的秩.

解答题各题及答案

推论 若可逆矩阵 P, Q 使 $PAQ = B$, 则 $R(A) = R(B)$.

例5 解: 根据定理2, 要求矩阵 A 的秩, 只须对 A 作初等行变换变成行阶梯形矩阵, 行阶梯形矩阵中非零行的行数即为该矩阵的秩.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} r_2 - r_1 \\ r_3 - 2r_1 \\ r_4 - 3r_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & -12 & 9 & 7 & -11 \\ 0 & -16 & 12 & 8 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} r_3 - 3r_2 \\ r_4 - 4r_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 - r_3} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore R(A) = 3$$

A 的最高阶非零子式为3阶, 而其3阶子式有 $C_4^3 C_5^3 = 40$ 个.

不妨令 $A = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$, $A_0 = (a_1, a_2, a_4)$

$$\text{可见 } A_0 \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 对应 } \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{可选取子式 } \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & 11 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 6 & 11 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$$

此种选取方法并非普遍成立!
(课后思考)

例6 解: $B = (A, b) \xrightarrow{r} (\tilde{A}, \tilde{b}) = \tilde{B}$ 行阶梯形矩阵

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 8 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & -6 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} r_2 - 2r_1 \\ r_3 + 2r_1 \\ r_4 - 3r_1 \end{matrix}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 \times \frac{1}{2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 1 \end{array} \right)$$

解线性方程组的基本方法

$$\begin{array}{l} \sqrt{3}-\sqrt{2} \\ \sqrt{4}+3\sqrt{2} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sqrt{4}-5\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R(A)=2, R(B)=3.$$

若用对应的线性方程组问题来看, $Ax=b$ 无解.

$$\text{例 7. 解: } A \xrightarrow[\sqrt{3}-5\sqrt{1}]{\sqrt{2}-3\sqrt{1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & \lambda+3 & -4 & -4 \\ 0 & 8 & \mu-5 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sqrt{3}-\sqrt{4}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & \lambda+3 & -4 & -4 \\ 0 & 5-\lambda & \mu-1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore R(A)=2, \therefore \begin{cases} 5-\lambda=0 \\ \mu-1=0 \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} \lambda=5 \\ \mu=1 \end{cases}$$

矩阵秩的基本性质:

$$(i) \quad 0 \leq R(A_{m \times n}) \leq \min\{m, n\};$$

$$(ii) \quad R(A^T) = R(A);$$

$$(iii) \quad \text{若 } A \sim B, \text{ 则 } R(A) = R(B);$$

$$(iv) \quad \text{若 } P, Q \text{ 可逆, 则 } R(PAQ) = R(A);$$

$$(v) \quad \max\{R(A), R(B)\} \leq R(A, B) \leq R(A) + R(B);$$

$$(vi) \quad R(A+B) \leq R(A) + R(B);$$

$$(vii) \quad R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\};$$

$$(viii) \quad \text{若 } A_{m \times n} B_{n \times l} = O, \text{ 则 } R(A) + R(B) \leq n.$$

$$\begin{aligned} (A \sim -A) \\ E-A \sim A-E \end{aligned}$$

$$\text{例 8. 证明: } (A+E) + (E-A) = 2E$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} R(A+E) + R(E-A) &\geq R(2E) = n \\ R(E-A) &= R(A-E) \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow R(A+E) + R(A-E) \geq n$$

课后作业: P9 (第 54 页)
10. (3), 12.

四、线性方程组的解

n 个未知数 m 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

写成向量方程的形式：

$$Ax = b$$

线性方程组如果有解，就称它是相容的；

如果无解，——不相容。

利用系数矩阵 A 和增广矩阵 $B = (A, b)$ 的秩来讨论线性方程组的解。

定理3 n 元线性方程组 $Ax = b$

(i) 无解的充分必要条件是 $R(A) < R(A, b)$;

(ii) 有唯一解的充分必要条件是 $R(A) = R(A, b) = n$;

(iii) 有无限多解的充分必要条件是 $R(A) = R(A, b) < n$ 。

证明：只需证明充分性。

设 $R(A) = r$ ，为方便再假设 $B = (A, b)$ 的行最简形为

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{2,n-r} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{r,n-r} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解线性方程组

(i) 若 $R(A) < R(B)$, 则 $d_{r+1} = 1$, 进一步可知

$$d_1 = d_2 = \dots = d_r = 0 \quad (\text{满足行最简形矩阵的要求})$$

$\widetilde{B}$ 的第 $r+1$ 行对应 $0 = 1$ (矛盾方程)

故方程组无解.

(ii) 若 $R(A) = R(B) = r = n$, 则 $d_{r+1} = 0$ 或 d_{r+1} 不存在, 形式即为

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & d_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{对应方程组} \quad \begin{cases} x_1 = d_1 \\ x_2 = d_2 \\ \vdots \\ x_n = d_n \end{cases}$$

故方程组有唯一解.

(iii) 若 $R(A) = R(B) = r < n$, 则 $d_{r+1} = 0$ 或 d_{r+1} 不存在, 即

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1,n-r} & d_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{21} & \dots & b_{2,n-r} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{r1} & \dots & b_{r,n-r} & d_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

对应方程组

$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - \dots - b_{1,n-r}x_n + d_1 \\ x_2 = -b_{21}x_{r+1} - \dots - b_{2,n-r}x_n + d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - \dots - b_{r,n-r}x_n + d_r \end{cases}$$

解线性方程组

令 $x_{r+1} = c_1, \dots, x_n = c_{n-r}$, 则

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11}c_1 - \dots - b_{1,n-r}c_{n-r} + d_1 \\ \vdots \\ -b_{r1}c_1 - \dots - b_{r,n-r}c_{n-r} + d_r \\ c_1 + \dots + 0 \quad + 0 \\ \vdots \\ 0 + \dots + c_{n-r} + 0 \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + c_{n-r} \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

证毕.

注: 当 $R(A) = R(B) = r < n$ 时, 线性方程组的解称为通解.

证明过程给出了求解线性方程组的步骤:

(i) $B = (A, b) \xrightarrow{r}$ 行阶梯形矩阵

若 $R(A) < R(B)$, 则方程组无解.

(ii) 若 $R(A) = R(B)$,

行阶梯形矩阵 $\xrightarrow{r}$ 行最简形矩阵

(iii) 设 $R(A) = R(B) = r$, 取非自由未知数和自由未知数, 并令

自由未知数分别等于 $c_1, c_2, \dots, c_{n-r}$.

根据 B 的行最简形矩阵写出含 $n-r$ 个参数的通解.

对于齐次线性方程组

(i) 唯一解: $r = n$

(ii) 无限多解: $r < n$.

解线性方程组

例10 解:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2 \times (-\frac{1}{3})]{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即
$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 - \frac{5}{3}x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + \frac{4}{3}x_4 = 0 \end{cases}$$

则
$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 + \frac{5}{3}x_4 \\ x_2 = -2x_3 - \frac{4}{3}x_4 \end{cases}$$

写成参数形式

$$\begin{cases} x_1 = 2c_1 + \frac{5}{3}c_2 \\ x_2 = -2c_1 - \frac{4}{3}c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

向量形式

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

例11 解:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$R(A)=2, R(B)=3$, 故方程组无解.

解线性方程组

例12 解: $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & -6 & -7 & -1 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即 $\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2}x_3 - \frac{3}{4}x_4 + \frac{5}{4} \\ x_2 = \frac{3}{2}x_3 + \frac{7}{4}x_4 - \frac{1}{4} \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$ 即 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{7}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

例13 解: (一)初等行变换, (二)方程的行列式.

定理4 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解的充分必要条件是 $R(A) < n$.

定理5 线性方程组 $Ax=b$ 有解的充分必要条件是 $R(A) = R(A, b)$.

定理6 矩阵方程 $AX=B$ 有解的充分必要条件是 $R(A) = R(A, B)$.

定理7 设 $AB=C$, 则 $R(C) \leq \min\{R(A), R(B)\}$.

课后作业: P9(第6题)

13.(1), 14(2), 16(1), 18