上一章我们主要学习了行列式的定义、性质及计算方法，并用行列式表示出n元线性方程组的解. 行列式对应着一个 $n\times n$ 的数表，这一章我们将学习更一般的数表.

第二章 矩阵及其运算

一、矩阵

定义1 由 $m\times n$ 个数 a_{ij} $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成的m行n列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

称为m行n列矩阵，简称 $m\times n$ 矩阵，记作

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

这 $m\times n$ 个数称为矩阵A的元素，简称元。数 a_{ij} 位于矩阵A的第i行第j列，称为矩阵A的 (i,j) 元。

矩阵还可记作： (a_{ij}) 或 $(a_{ij})_{m\times n}$

$m\times n$ 矩阵A也可记作 $A_{m\times n}$.

按元素所属数域分类 $\begin{cases} \text{实矩阵：元素是实数的矩阵.} \\ \text{复矩阵：元素是复数的矩阵.} \end{cases}$

按矩阵结构：

行数与列数都等于n的矩阵称为n阶矩阵或n阶方阵.

只有一行的矩阵 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 称为行矩阵，又称行向量.

只有一列的矩阵 $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ 称为列矩阵，又称列向量，也可记作 $B=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^T$.

两个矩阵的行数相等、列数也相等时，就称它们是同型矩阵.

如果$A=(a_{ij})$与$B=(b_{ij})$是同型矩阵，并且它们的对应元素相等，即

$$a_{ij}=b_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n),$$

那么就称矩阵A与矩阵B相等，记作$A=B$.

元素都是零的矩阵称为零矩阵，记作O.

前面介绍了一些矩阵的概念，矩阵这种数学形式能用来描述什么呢？能用来研究哪些问题呢？让我们先来看几个例子.

例1. P_{30}　例2. P_{30}

例3　n个变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$与m个变量$y_1,y_2,\cdots,y_m$之间的关系式

$$\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{cases}$$

表示一个从变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$到变量$y_1,y_2,\cdots,y_m$的线性变换，其中a_{ij}为常数.

线性变换的系数a_{ij}构成一个矩阵，可记作$A=(a_{ij})_{m\times n}$。

线性变换与矩阵之间一一对应，具体地说线性变换给定时，其系数构成的矩阵（称为系数矩阵）是确定的. 反之，如果一个矩阵是线性变换的系数矩阵，那么线性变换是确定的.

一些特殊的线性变换和其系数矩阵：

恒等变换 $\begin{cases} y_1=x_1 \\ y_2=x_2 \\ \vdots \\ y_n=x_n \end{cases}$，对应一个n阶方阵 $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 叫做n阶单位阵，简称单位阵.

E的(i,j)元为 $\delta_{ij}=\begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$

线性变换 $\begin{cases} y_1=\lambda_1 x_1 \\ y_2=\lambda_2 x_2 \\ \vdots \\ y_n=\lambda_n x_n \end{cases}$ 对应 n 阶方阵 $\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ 称为对角矩阵.
简称对角阵.

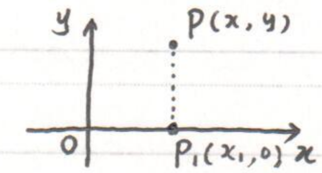
特点：不在对角线上的元素（简称非对角元）都是 0.

对角阵也可记作 $\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$.

以上例子表明可以利用矩阵来研究线性变换. 实际上，也可以用线性变换来解释矩阵的含义.

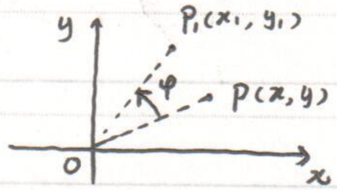
矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 可以用线性变换 $\begin{cases} x_1=x \\ y_1=0 \end{cases}$ 赋予一个形象的理解，即

投影变换：



（也可按向量投影讲解）

矩阵 $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ 可以用线性变换 $\begin{cases} x_1=x\cos\varphi-y\sin\varphi \\ y_1=x\sin\varphi+y\cos\varphi \end{cases}$ 赋予一个形象的理解，即旋转变换：



（也可按向量旋转来讲解）

课后思考：习题二 3.13（第五版） 消元法、代入法.

二、矩阵的运算

1. 矩阵的加法

定义 2 设有两个 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$ 和 $B=(b_{ij})$，那么矩阵 A 与 B 的和记作 $A+B$，规定为

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵加法满足：

(i) 交换律：$A+B=B+A$

(ii) 结合律：$(A+B)+C=A+(B+C)$

设矩阵 $A=(a_{ij})$，记 $-A=(-a_{ij})$，$-A$ 称为矩阵 A 的负矩阵.

$$A+(-A)=O$$

规定矩阵的减法为 $A-B=A+(-B)$

2. 数与矩阵相乘

定义3 数 λ 与矩阵 A 的乘积记作 λA 或 $A\lambda$，规定为

$$\lambda A=A\lambda=\begin{pmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn}\end{pmatrix}$$

隐含“交换律”

数与矩阵相乘满足：

(i) “结合律”：$(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$

(ii) 分配律：$(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$

$$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$$

矩阵相加与数乘矩阵，统称为矩阵的线性运算.

3. 矩阵与矩阵的乘积

定义4 设 $A=(a_{ij})$ 是一个 $m\times s$ 矩阵，$B=(b_{ij})$ 是一个 $s\times n$ 矩阵，规定矩阵 A 与矩阵 B 的乘积是一个 $m\times n$ 矩阵 $C=(c_{ij})$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$

$$(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

并把此乘积记作 $C=AB$

亦可从线性变换出发引入矩阵乘法定义.

注意：左矩阵的列数＝右矩阵的行数

剖析 c_{ij} ：$1\times s$ 行矩阵与 $s\times 1$ 列矩阵的乘积是一个1阶方阵，即

$$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{is})\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj}$$

$$= \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj} = c_{ij}$$

表明乘积矩阵 $AB=C$ 的 (i,j) 元 c_{ij} 就是 A 的第 i 行与 B 的第 j 列的乘积.

例 4.5 P_{35}

矩阵的乘法满足：

(i) 结合律：$(AB)C = A(BC)$

$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

不满足交换律！

(ii) 分配律：$A(B+C) = AB+AC$

$(B+C)A = BA+CA$

对于两个 n 阶方阵 A、B，若 $AB=BA$，则称方阵 A 与 B 是可交换的.

单位阵：$EA = AE = A$

纯量阵：λE 与任何同阶方阵都是可交换的.

根据矩阵的乘法定义矩阵的幂. 设 A 是 n 阶方阵，定义

$$A^1 = A, \quad A^2 = A^1A^1, \quad \cdots, \quad A^{k+1} = A^kA^1$$

其中 k 为正整数.

矩阵的幂满足：

$A^kA^l = A^{k+l}$，$(A^k)^l = A^{kl}$，其中 k、l 为正整数.

一般而言 $(AB)^k \neq A^kB^k$ 例 P_{37-38}

线性变换的矩阵表示可适当详述！

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

记 $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$，$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

则线性变换的矩阵形式为

$Y = AX$ 即表明把 X 变成 Y，只须用矩阵 A 左乘 X.

4. 矩阵的转置

定义5 把矩阵A的行换成同序数的列得到一个新矩阵，叫做A的转置矩阵，记作 A^T .

矩阵的转置运算满足：

(i) $(A^T)^T = A$

(ii) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(iii) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

(iv) $(AB)^T = B^T A^T$

仅证明(iv). $d_{ij} = \sum_{k=1}^{s} b_{ki}a_{jk} = \sum_{k=1}^{s} a_{jk}b_{ki} = c_{ji} \Rightarrow B^T A^T = (AB)^T$

$A = (a_{ij})_{m\times s}$, $B = (b_{ij})_{s\times n}$, 记 $AB = C = (c_{ij})_{m\times n}$

$B^T A^T = D = (d_{ij})_{n\times m}$

例7 P_{39}

设A为n阶方阵，如果满足$A^T=A$，即$a_{ij}=a_{ji}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$，则A称为对称矩阵，简称对称阵。

$$A^T=A \iff A\text{是对称阵}$$

5. 方阵的行列式

定义6　由n阶方阵A的元素所构成的行列式（各元素的位置不变），称为方阵A的行列式，记作$|A|$或$\det A$。

满足：

(i) $|A^T|=|A|$　　（行列式性质1）

(ii) $|\lambda A|=\lambda^n|A|$

(iii) $|AB|=|A||B|$　　　$AB\neq BA$，但$|AB|=|BA|$

行列式$|A|$的各个元素的代数余子式A_{ij}所构成的矩阵

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵A的伴随矩阵，简称伴随阵。

$$AA^*=A^*A=|A|E \qquad \text{结果是纯量阵.}$$

6. 共轭矩阵

当$A=(a_{ij})$为复矩阵时，用$\bar{a}_{ij}$表示a_{ij}的共轭复数，记

$$\bar{A}=(\bar{a}_{ij})$$

$\bar{A}$称为A的共轭矩阵。

满足：(i) $\overline{A+B}=\bar{A}+\bar{B}$

(ii) $\overline{\lambda A}=\bar{\lambda}\bar{A}$

(iii) $\overline{AB}=\bar{A}\bar{B}$

课后作业：第五版 P_{54}，1(3)，(5)；2，3，7，8，9

三、逆矩阵

考虑线性变换

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

其矩阵形式可写为

$$Y = AX \tag{8}$$

根据伴随阵的性质，可构造

$$A^*Y = A^*AX \Rightarrow A^*Y = |A|X$$

若 $|A| \neq 0$，则有

$$X = \frac{1}{|A|}A^*Y$$

记 $B = \frac{1}{|A|}A^*$，则

$$X = BY \tag{9}$$

可见，(9)表示从 Y 到 X 的线性变换，所以称之为(8)的逆变换.

显然，A 与 B 存在某种联系.

一方面，$Y = A(BY) = (AB)Y$　　恒等变换

$$AB = E$$

另一方面，$X = B(AX) = (BA)X$　　恒等变换

$$BA = E$$

故　$AB = BA = E$　　根据该关系式，即可引入逆矩阵的定义.

定义7 对于n阶矩阵A，如果有一个n阶矩阵B，使

$$AB = BA = E$$

则说矩阵A是可逆的，并把矩阵B称为A的逆矩阵，简称逆阵，记作 $B = A^{-1}$.

定理1 若矩阵A可逆，则 $|A| \neq 0$.

证明： A可逆，存在 A^{-1}，使 $AA^{-1} = E$.

$$|A| \cdot |A^{-1}| = |E| = 1$$

故 $|A| \neq 0$

定理2 若 $|A| \neq 0$，则矩阵A可逆，且 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$，

其中，A^* 为矩阵A的伴随阵.

证明：$\left.\begin{array}{l} \because AA^* = A^*A = |A|E \\ |A| \neq 0 \end{array}\right\}$

$$\Rightarrow A \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{|A|} A^* A = E$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

当 $|A| = 0$ 时，A称为奇异矩阵，否则称非奇异矩阵.

A是可逆矩阵的充分必要条件是 $|A| \neq 0$，即可逆矩阵就是非奇异矩阵.

推论 若 $AB = E$（或 $BA = E$），则 $B = A^{-1}$.

证明：(i) $|A| \cdot |B| = |E| = 1$，故 $|A| \neq 0$，A^{-1} 存在.

(ii) $B = EB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}E = A^{-1}$.（构造法）

方阵的逆阵满足：

(i) 若A可逆，则A^{-1}亦可逆，且 $(A^{-1})^{-1}=A$

(ii) 若A可逆，数$\lambda\neq0$，则λA亦可逆，且 $(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$.

(iii) 若A、B为同阶矩阵且均可逆，则 AB 亦可逆，且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

证明：$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AEA^{-1}=AA^{-1}=E$

故 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

(iv) 若A可逆，则A^T亦可逆，且 $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

证明：$A^T(A^{-1})^T=(A^{-1}A)^T=E^T=E$

故 $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

当$|A|\neq0$，可定义 $A^0=E$，$A^{-k}=(A^{-1})^k$ （零次幂和负次幂）

当$|A|\neq0$时，则

$$A^{\lambda}A^{\mu}=A^{\lambda+\mu},\quad (A^{\lambda})^{\mu}=A^{\lambda\mu}$$ （方阵幂的推广）

其中，λ、μ为整数.

例10、11、12、13 P_{44-45}

例12 矩阵方程 $AXB=C$ 求X

若A^{-1}、B^{-1}存在，则 $X=A^{-1}CB^{-1}$.

例13 $|P|=2\neq0$，P^{-1}存在. 则 $A=P\Lambda P^{-1}$，$A^2=P\Lambda^2P^{-1}$，…，$A^n=P\Lambda^nP^{-1}$.

设 $\varphi(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$ 为 x 的 m 次多项式，A 为 n 阶矩阵，

记
$$\varphi(A)=a_0E+a_1A+\cdots+a_mA^m,$$

$\varphi(A)$ 称为矩阵A的 m 次多项式.

满足 $\varphi(A)f(A)=f(A)\varphi(A)$ 矩阵A的多项式是可交换的.

关于多项式 $\varphi(A)$ 的计算：

(i) 若 $A=P\Lambda P^{-1}$，则 $A^k=P\Lambda^kP^{-1}$，进而

$$\begin{aligned}\varphi(A)&=a_0E+a_1A+\cdots+a_mA^m\\&=Pa_0EP^{-1}+Pa_1\Lambda P^{-1}+\cdots+Pa_m\Lambda^mP^{-1}\\&=P\varphi(\Lambda)P^{-1}\end{aligned}$$

即化为关于对角阵 Λ 的多项式的计算.

(ii) 若 $\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 为对角阵，则

$\Lambda^k=diag(\lambda_1^k,\lambda_2^k,\cdots,\lambda_n^k)$，进而

$$\begin{aligned}\varphi(\Lambda)&=a_0E+a_1\Lambda+\cdots+a_m\Lambda^m\\&=a_0\begin{pmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{pmatrix}+a_1\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}+\cdots+a_m\begin{pmatrix}\lambda_1^m&&&\\&\lambda_2^m&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n^m\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\varphi(\lambda_1)&&&\\&\varphi(\lambda_2)&&\\&&\ddots&\\&&&\varphi(\lambda_n)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

例14.

课后作业：P57（第五版）10.(2)、(3)，11.(1)、(4)，12(2)，13，14，15，17，19，21

四、矩阵分块法：将矩阵A用若干条纵线和横线分成许多个小矩阵.

目的：使大矩阵的运算化成小矩阵的运算.

矩阵A中每一个小矩阵称为A的子块.

以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵.

例
$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)$$

若使用分法(i)，则

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

其中，$A_{11}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$，$A_{12}=\begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$

$$A_{21}=(a_{31},a_{32}),\quad A_{22}=(a_{33},a_{34})$$

$A_{11},A_{12},A_{21},A_{22}$ 为A的子块.

1. 分块矩阵的运算规则

(1) A与B同型，采用相同的分块法.

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix}$$

其中 A_{ij} 与 B_{ij} 同型，那么

$$A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & \cdots & A_{1r}+B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1}+B_{s1} & \cdots & A_{sr}+B_{sr} \end{pmatrix}$$

(2) 设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$，$\lambda$为数，那么

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}$$

(3) 设A为$m\times l$矩阵，B为$l\times n$矩阵，分块成

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix}$$

其中，A_{i1}、A_{i2}、$\cdots$、A_{it}的列数分别等于$B_{1j}, B_{2j}, \cdots, B_{tj}$的行数，那么

$$AB=\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix}$$

其中，$C_{ij}=\sum_{k=1}^{t} A_{ik}B_{kj} \quad (i=1,\cdots,s;\ j=1,\cdots,r)$

P_{48} 例15 分块乘法.（如时间允许，可使用不同分块法）

(4) 设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$，则 $A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}$

两步：(i) 分块形式转置

(ii) 子块转置.

(5) 设A为n阶矩阵，若A的分块矩阵只有在对角线上有非零子块，其余子块都为零矩阵，且在对角线上的子块都是方阵，即

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix},$$

其中 $A_i\ (i=1,2,\cdots,s)$ 都是方阵，那么称A为分块对角矩阵.

分块对角矩阵的性质：

(i) $|A|=|A_1|\cdot|A_2|\cdots|A_s|$

(ii) 若 $|A_i|\neq 0\ (i=1,2,\cdots,s)$，则 $|A|\neq 0$，有

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & O \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$$

P_{50} 例16. 分块对角矩阵的逆矩阵.

2、矩阵的按行(列)分块

$m\times n$矩阵A有m行，称为(矩阵A的)m个行向量. 先有矩阵.

第i行记作 $\alpha_i^T=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$，则

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_m^T \end{pmatrix}$$

$m\times n$ 矩阵 A 有 n 列，称为矩阵 A 的 n 个列向量．　　先有矩阵．

第 j 列记作：$a_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{pmatrix}$，　则

$$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n).$$

对于矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times s}$ 与矩阵 $B=(b_{ij})_{s\times n}$ 的乘积矩阵 $AB=C=(c_{ij})_{m\times n}$，若把 A 按行分成 m 块，把 B 按列分成 n 块，有

$$AB=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\\alpha_2^T\\\vdots\\\alpha_m^T\end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha_1^Tb_1 & \alpha_1^Tb_2 & \cdots & \alpha_1^Tb_n\\\alpha_2^Tb_1 & \alpha_2^Tb_2 & \cdots & \alpha_2^Tb_n\\\vdots & \vdots & & \vdots\\\alpha_m^Tb_1 & \alpha_m^Tb_2 & \cdots & \alpha_m^Tb_n\end{pmatrix}$$

$$=(c_{ij})_{m\times n}$$

其中 $c_{ij}=\alpha_i^Tb_j=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{is})\begin{pmatrix}b_{1j}\\b_{2j}\\\vdots\\b_{sj}\end{pmatrix}=\sum\limits_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$

用一种新的方式理解矩阵相乘的定义．

以对角阵 Λ_m 左乘矩阵 $A_{m\times n}$ 时，把 A 按行分块，有

$$\Lambda_m A_{m\times n} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_m^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\alpha_1^T \\ \lambda_2\alpha_2^T \\ \vdots \\ \lambda_m\alpha_m^T \end{pmatrix}$$

以对角阵 Λ_n 右乘矩阵 $A_{m\times n}$ 时，把 A 按列分块，有

$$A_{m\times n}\Lambda_n = (a_1, a_2, \cdots, a_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda_1 a_1, \lambda_2 a_2, \cdots, \lambda_n a_n)$$

P_{51} 例17 $A = O \Longleftrightarrow A^TA = O$ 课后阅读.

对于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

记 $A = (a_{ij})_{m\times n}$， $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$， $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

系数矩阵　　未知数向量　　常数项向量

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

增广矩阵

按分块矩阵记法，$B = (A \mid b)$ 或 $B = (A, b) = (a_1, a_2, \cdots, a_n, b)$.

方程组可记为 $Ax = b$，其中 x 称为方程组(11)的解向量.

若把系数矩阵 A 按行分成 m 块，则线性方程组 $Ax=b$ 可记作

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_m^T \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

或
$$\begin{cases} \alpha_1^T x = b_1 \\ \alpha_2^T x = b_2 \\ \quad\vdots \\ \alpha_m^T x = b_m \end{cases}$$

相当于把每个方程

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

记作
$$\alpha_i^T x = b_i \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

若把系数矩阵 A 按列分成 n 块，则与 A 相乘的 x 应对应地分成 n 块，

记作

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b$$

即 $x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n = b$

今后，各种与线性方程组 (11) 等价的形式均统称为线性方程组或线性方程，解与解向量也不加区别。

克拉黙法则的证明：

$$Ax = b$$

$|A| = D \neq 0$，故 A^{-1} 存在，则

若令 $x = A^{-1}b$，有

$$Ax = AA^{-1}b = b$$

表明 $x = A^{-1}b$ 是方程组的解向量.

逆阵的唯一性 $\Longrightarrow$ 解向量的唯一性

而 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$，则

$x = \frac{1}{D}A^*b$，即

$$x_j = \frac{1}{D}(b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \cdots + b_nA_{nj})$$

即 $x_j = \frac{D_j}{D}$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$

课后作业：P_{56}（第五版）

25, 26, 27, 28