2011.9（第二稿）
2012.9（第三稿）

线性代数（高等代数）

主要应用：数值计算方法——矩阵形式的操作 ⎫
量子力学——本征值问题 ⎭ 求解（线性）方程组

第一章 行列式

一、二阶与三阶行列式

1. 二元线性方程组与二阶行列式

我们将用两个简单的例子引出行列式的定义。

首先，来看一个二元一次（线性）方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (2) \end{cases}$$

要求解这组方程，通常采用消元法，即

$(1)\times a_{22} - (2)\times a_{12}$，消去 x_2，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

同理，消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{12}$$

当系数 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，可得上述方程组的解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\[2ex] x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - b_1a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases}$$

大家仔细观察这组解，会发现其分子、分母都是四个数分两两时相乘再相减得到的，其中分母 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 是由方程组的四个系数确定的。如果把这四个数按它们在方程组中的位置排成2行2列（横排称行，竖排称列）的数表，即

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

定义：符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 为上述数表所确定的二阶行列式。

表示符号的值等于 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$。

数 a_{ij} $(i=1,2;\ j=1,2)$ 称为行列式的元素或元。

元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行，

第二个下标 j 称为列标，————第 j 列。

位于第 i 行第 j 列的元素称为行列式的 (i,j) 元。

主　　副

记忆法：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

引入了二阶行列式的形式定义后，方程组解中的分子也可以写成这种形式，即

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

同用字母表示为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

则

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} \boxed{b_1} & a_{12} \\ \boxed{b_2} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

$$x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \boxed{b_1} \\ a_{21} & \boxed{b_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

其中 D 称系数行列式.

例1
$$\begin{cases} 3x_1-2x_2=12 \\ 2x_1+x_2=1 \end{cases}$$

用行列式的方法求解上述方程

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3\times1-(-2)\times2=7\neq0$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=12\times1-(-2)\times1=14$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3\times1-12\times2=-21$$

则
$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{14}{7}=2 \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{-21}{7}=-3 \end{cases}$$

2、三元线性方程组和三阶行列式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 & (2) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 & (3) \end{cases}$$

利用消元法，消去 x_3

$(2)\times a_{33} - (3)\times a_{23}$，得

$$a_{21}a_{33}x_1 + a_{22}a_{33}x_2 - a_{31}a_{23}x_1 - a_{32}a_{23}x_2$$

$$= b_2a_{33} - b_3a_{23}$$

即 $$(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23})x_1 + (a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23})x_2$$

$$= b_2a_{33} - b_3a_{23} \qquad (4)$$

$(1)\times a_{33} - (3)\times a_{13}$，得

$$a_{11}a_{33}x_1 + a_{12}a_{33}x_2 - a_{31}a_{13}x_1 - a_{32}a_{13}x_2$$

$$= b_1a_{33} - b_3a_{13}$$

即 $$(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13})x_1 + (a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13})x_2$$

$$= b_1a_{33} - b_3a_{13} \qquad (5)$$

再消去 x_2，

$(4)\times(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) - (5)\times(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23})$，得

$$[(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23})x_1 + (a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23})x_2] \times (a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13})$$

$$- [(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13})x_1 + (a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13})x_2] \times (a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23})$$

$$= (b_2a_{33} - b_3a_{23})(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) - (b_1a_{33} - b_3a_{13})(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23})$$

即 $(a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23})(a_{12}a_{33}-a_{32}a_{13})x_1$

$-(a_{11}a_{33}-a_{31}a_{13})(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})x_1$

$=(b_2a_{33}-b_3a_{23})(a_{12}a_{33}-a_{32}a_{13})$

$-(b_1a_{33}-b_3a_{13})(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})$

即 $(a_{21}a_{33}a_{12}\underline{a_{33}}-a_{21}\underline{a_{33}}a_{32}a_{13}-a_{31}a_{23}a_{12}\underline{a_{33}}+\cancel{a_{31}a_{23}a_{32}a_{13}})x_1$

$-(a_{11}a_{33}a_{22}\underline{a_{33}}-a_{11}\underline{a_{33}}a_{32}a_{23}-a_{31}a_{13}a_{22}\underline{a_{33}}+\cancel{a_{31}a_{13}a_{32}a_{23}})x_1$

$=(b_2a_{33}a_{12}\underline{a_{33}}-b_2\underline{a_{33}}a_{32}a_{13}-b_3a_{23}a_{12}\underline{a_{33}}+\cancel{b_3a_{23}a_{32}a_{13}})$

$-(b_1a_{33}a_{22}\underline{a_{33}}-b_1\underline{a_{33}}a_{32}a_{23}-b_3a_{13}a_{22}\underline{a_{33}}+\cancel{b_3a_{13}a_{32}a_{23}})$

即 $(a_{21}a_{33}a_{12}-a_{21}a_{32}a_{13}-a_{31}a_{23}a_{12}-a_{11}a_{33}a_{22}+a_{11}a_{32}a_{23}+a_{31}a_{13}a_{22})x_1$

$=b_2a_{33}a_{12}-b_2a_{32}a_{13}-b_3a_{23}a_{12}-b_1a_{33}a_{22}+b_1a_{32}a_{23}+b_3a_{13}a_{22}$

则当系数不为0时，x_1有解.

即 $$x_1=\frac{b_2a_{33}a_{12}-b_2a_{32}a_{13}-b_3a_{23}a_{12}-b_1a_{33}a_{22}+b_1a_{32}a_{23}+b_3a_{13}a_{22}}{a_{21}a_{33}a_{12}-a_{21}a_{32}a_{13}-a_{31}a_{23}a_{12}-a_{11}a_{33}a_{22}+a_{11}a_{32}a_{23}+a_{31}a_{13}a_{22}}$$

x_2和x_3亦具有这种形式.

定义 三阶行列式

记 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 为数表 $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$ 所确定的行列式，其值等于

$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$

可见 $x_1=\frac{D_1}{D}$，x_2和x_3亦可用行列式表示. 这种结果说明引入的三阶行列式的确可以用来表示三元线性方程组的解.

记忆法：

$$\begin{array}{ccccc} & \text{主} & & \text{副} & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

例2 使用对角线法则计算三阶行列式.

例3 求解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0$.

这节课我们引入了一种新的数学形式将二元线性方程组和三元线性方程组的解直接表示出来，它们分别称作二阶行列式和三阶行列式. 从形式上来说，我们可以很自然地将行列式的概念推广到 n 阶，再用 n 阶行列式把 n 元线性方程组的解直接表示出来.

要定义出 n 阶行列式，我们必须引入逆序数的概念.

复习二阶、三阶行列式的对角线法则（2位同学上黑板）；习题1（4位同学上黑板）.

二、全排列及其逆序数

1，2，3 组成没有重复的三位数.

123
132
213
231
312
321

$3\times2\times1 = 6 = 3!$

属于全排列问题. n 个元素具有 $n!$ 种全排列.

若规定一个标准次序，则当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就说有1个逆序. 一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数. 这反映了排列的一种性质！

对于 n 个自然数，可以规定由小到大为标准次序.　$\begin{cases}\text{奇排列}\\ \text{偶排列}\end{cases}$　排列的奇偶性

例4 求32514的逆序数　　排列的逆序数 = 全体元素的逆序数之和.

三、n阶行列式的定义

我们首先观察一下三阶行列式，分析其有哪些特点.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

(i) 形如 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ 的乘积有 $6=3!$ 项，且每一项中三个元素位于不同行、不同列.

(ii) 列标排列 $p_1p_2p_3$ 与正负号的对应关系可以逆序数来描述.

$+$: 123　231　312　　寻找出排列与符号的联系!

　　0　　2　　2

$-$: 132　213　321

　　1　　1　　3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{\text{所有}\\\text{排列}}} (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

推广到n阶行列式：

符号记为 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 简记为 $\det(a_{ij})$，数 a_{ij} 为行列式D的 (i,j) 元.

其值

$$D=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

其中任一项乘积 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 中的n个数位于不同行、不同列.

$p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，$t=t(p_1p_2\cdots p_n)$.

这样的排列有 $n!$ 个，乘积项有 $n!$ 项.

例5 证明（用行列式定义 ①先写出所有乘积项 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ ）

②再求和 $\sum$

（主）对角行列式 $\begin{vmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$

证明： $a_{11}=\lambda_1,\ a_{22}=\lambda_2,\ \cdots,\ a_{nn}=\lambda_n$

$a_{ij}=0 \quad (i\neq j)$

只有一项乘积非零即 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

故 $\begin{vmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = (-1)^{t(12\cdots n)} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$ 证毕

“副对角”行列式 $\begin{vmatrix} & & \lambda_1 \\ & \lambda_2 & \\ \lambda_n & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$ （不能用对角线法则描述的依据！）

证明： $a_{1n}=\lambda_1,\ a_{2,n-1}=\lambda_2,\ \cdots,\ a_{n1}=\lambda_n$

只有一项乘积非零即 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$

故 $\begin{vmatrix} & & \lambda_1 \\ & \lambda_2 & \\ \lambda_n & & \end{vmatrix} = (-1)^{t(n,n-1,\cdots,1)} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$

$$t(n,n-1,\cdots,1) = 0+1+\cdots+(n-1) = \frac{(n-1+0)n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$\begin{vmatrix} & & \lambda_1 \\ & \lambda_2 & \\ \lambda_n & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$ 证毕

例6 存在一类行列式，其主对角线以下（上）的元素都为0，这类行列式称为上（下）三角行列式，它的值与（主）对角行列式一样.

$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ $\qquad (-1)^t a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

此题作为下节课前复习或该节课后练习.

上节课我们学习了n阶行列式的定义，现在我们来复习一下，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{\text{所有} \\ \text{排列}}} (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

特征： 1. 乘积项中n个数 $a_{1p_1}, a_{2p_2}, \cdots, a_{np_n}$ 来自不同行不同列，共有 $n!$ 项.

2. 乘积项的符号 $(-1)^t$ 中 $t = t(p_1 p_2 \cdots p_n)$

下面练习一道习题：习题一的第3题（P_{26}） 2位同学

这节课我们要学习行列式具有哪些性质．在研究n阶行列式的性质之前，我们先来讨论对换的概念以及它与排列奇偶性的关系，因为这将有助于我们更容易地去研究(n阶)行列式的性质.

四、对换

在排列中，将任意两个元素对调，其余元素不动，这种作出新排列的操作，叫做对换。

将相邻两个元素对换，叫做相邻对换.

定理1 一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

证明： ① 相邻对换

$$a_1 \cdots a_l a b b_1 \cdots b_m \longrightarrow a_1 \cdots a_l b a b_1 \cdots b_m$$

(i) $a<b$, $t_a' = t_a + 1$, $t_b' = t_b$

(ii) $a>b$, $t_a' = t_a$, $t_b' = t_b - 1$

即 $a_1 \cdots a_l a b b_1 \cdots b_m$ 与 $a_1 \cdots a_l b a b_1 \cdots b_m$ 的奇偶性不同.

② 一般对换

$$a_1\cdots a_l a b_1\cdots b_m b c_1\cdots c_n$$

$\downarrow$ 经m次相邻对换

$$a_1\cdots a_l a b b_1\cdots b_m c_1\cdots c_n$$

$\downarrow$ 经m+1次相邻对换

$$a_1\cdots a_l b b_1\cdots b_m a c_1\cdots c_n$$

共经 $m+(m+1)=2m+1$ 次相邻对换

因此，两个排列的奇偶性相反．即表明排列对换的次数就是排列奇偶性变化的次数．

推论 奇排列变成标准排列的对换次数为奇数，

偶排列 ———————— 为偶数．

标准排列是逆序数为0的偶排列．

下面我们先利用定理1来研究行列式的任一项，

$$(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}$$

其中行标排列 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 为自然排列，t 为列标排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序数．

若对换元素 a_{ip_i} 和 a_{jp_j}，则这一项变成

$$(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}$$

仅仅是两个数的位置交换了，因此这一项的值不变．然而我们发现逆序数 t 与新的排列似乎失去了直接的关系．

注意到行标排列与列标排列同时作了一次相应的对换，即新的行标排列为 $1\cdots j\cdots i\cdots n$，设其逆序数为 r，则 r 必为奇数；新的列标排列为 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 设其逆序数为 t_1，则 $(-1)^{r+t_1}=(-1)^t$ 成立

那么 $(-1)^{t} a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}$

$$= (-1)^{r+t_1} a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}$$

表明对换乘积中两元素的次序，虽然会使行标排列与列标排列同时作相应的对换，但是行标排列与列标排列的逆序数之和恰好使得乘积项的符号不会发生改变.

若使列标排列 $p_1p_2\cdots p_n$（逆序数为 t）变为自然排列（逆序数为0），则行标排列会相应地从自然排列变为某个新的排列，若设此新排列为 $q_1q_2\cdots q_n$，其逆序数为 s，则

$$(-1)^{t} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} = (-1)^{s} a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$$

可以看出若 $p_i = j$，则 $q_j = i$.

即 $a_{i\underline{p_i}} = a_{i\underline{j}} = a_{q_j\underline{j}}$

表明排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 由排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 唯一确定.

定理2　n 阶行列式也可定义为

$$D = \sum (-1)^{t} a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$$

其中 t 为行标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数.

证明：各项一一对应.

五、行列式的性质

性质1　行列式与它的转置行列式相等

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明：令 D^T (i,j) 元为 b_{ij}，则

$$D^T=\sum(-1)^t b_{1p_1} b_{2p_2}\cdots b_{np_n}=\sum(-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$$

而 $D=\sum(-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$

故　$D^T=D$

这表明 行与列具有同等地位.

性质2　互换行列式的两行(列)，行列式变号.

$$r_i \leftrightarrow r_j, \quad c_i \leftrightarrow c_j$$

推论　如果行列式有两行(列)完全相同，则此行列式为零.

$$D=-D \Longrightarrow D=0$$

性质3　行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一个数k，等于用数k乘此行列式.

第i行(列)乘以k，记作$r_i \times k$ $(c_i \times k)$

推论　行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式记号的外面.

第i行(列)提出公因子k，记作$r_i \div k$ $(c_i \div k)$

性质4　行列式中如果有两行(列)元素成比例，则此行列式等于零.

性质5　若行列式的某一列(行)的元素都是两数之和，则该行列式可以分解为两个行列式之和，即

若第i列的元素都是两数之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a_{1i}') & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a_{2i}') & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a_{ni}') & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i}' & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i}' & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni}' & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

司常例，$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+1 & 2+2 & 3+3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

或 $= \begin{vmatrix} 1+1 & 1+3 & 1+5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

性质6 把行列式的某一列(行)的各元素乘以同一数然后加到另一列(行)的对应的元素上去，行列式不变.

即若以数k乘第j列加到第i列上(记作 c_i+kc_j)，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1i} \cdots a_{1j} \cdots a_{1n} \\ a_{21} \cdots a_{2i} \cdots a_{2j} \cdots a_{2n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{ni} \cdots a_{nj} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{c_i+kc_j} \begin{vmatrix} a_{11} \cdots (a_{1i}+ka_{1j}) \cdots a_{1j} \cdots a_{1n} \\ a_{21} \cdots (a_{2i}+ka_{2j}) \cdots a_{2j} \cdots a_{2n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} \cdots (a_{ni}+ka_{nj}) \cdots a_{nj} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

同样，以数k乘第j行加到第i行上，记作 r_i+kr_j.

注意：性质5表明，当某一行(列)的元素为两数之和时，行列式关于该行(列)可分解为两个行列式. 若n阶行列式每个元素都表示成两数之和，则它可分解成 2^n 个行列式. 例如

$$\begin{vmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+y \\ c & d+w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & b+y \\ z & d+w \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & y \\ c & w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & b \\ z & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}$$

性质2、3、6介绍了行列式关于行和列的三种运算，即

$r_i \leftrightarrow r_j$，$r_i \times k$，r_i+kr_j 和 $c_i \leftrightarrow c_j$，$c_i \times k$，c_i+kc_j.

利用这些性质可以简化行列式的计算. 计算行列式常用的一种方法就是利用运算 r_i+kr_j 把行列式化为上(下)三角行列式，从而得到行列式的值.

例 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$

解：

$$D \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_2} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+5r_1]{r_2-r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-8r_2]{r_3+4r_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+\frac{5}{4}r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = 1\times 2\times 8\times \frac{5}{2} = 40$$

方法小结：① $c_1 \leftrightarrow c_2$，把 a_{11} 化为 1

② $r_i - a_{i1} r_j$，把 $a_{i1}\ (i=2,3,4)$ 化为 0

例 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

解：

$$D \xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4} \begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \div 6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \times 6$$

$$\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \times 6 = 1\times 2\times 2\times 2\times 6 = 48$$

例 $D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$

解：$D \overset{\substack{r_4-r_3 \\ r_3-r_2}}{\underset{r_2-r_1}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix}$

$\overset{r_4-r_3}{\underset{r_3-r_2}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix}$

$\overset{r_4-r_3}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$

$= a^4$

注意：① 运算次序不能颠倒

② r_i+r_j 与 r_j+r_i 的区别

例 求证

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_1=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

$$D_2=\det(b_{ij})=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D=D_1D_2$$

证明：

$$D_1 \xlongequal{r_i+kr_j} \begin{vmatrix} p_{11} & \ddots & 0 \\ \vdots & & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{vmatrix} = p_{11}\cdots p_{kk}$$

运算互不影响.

$$D_2 \xlongequal{c_i+kc_j} \begin{vmatrix} q_{11} & \ddots & 0 \\ \vdots & & \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix} = q_{11}\cdots q_{nn}$$

$$D=\left|\begin{array}{ccc|ccc} p_{11} & \ddots & 0 & & & \\ \vdots & & & & 0 & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} & & & \\ \hline c_{11} & \cdots & c_{1k} & q_{11} & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{array}\right| = p_{11}\cdots p_{kk}\,q_{11}\cdots q_{nn} = D_1D_2$$

例　计算 2n 阶行列式

$$D_{2n}=\underbrace{\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \ddots & \\ c & & & & & d \end{vmatrix}}_{2n}$$

解：

$$D_{2n}=(-1)^{2(2n-2)}\left|\begin{array}{cc|c} a & b & O \\ c & d & \\ \hline O & & \underbrace{\begin{array}{cccccc} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \ddots & \\ c & & & & & d \end{array}}_{2(n-1)} \end{array}\right|$$

$$=D_2D_{2(n-1)}=(ad-bc)D_{2(n-1)}$$

$$D_{2n}=(ad-bc)^2D_{2(n-2)}=\cdots=(ad-bc)^{n-1}D_2$$

$$=(ad-bc)^n$$

课堂练习：习题一．4（2）、（4）

方法小结：将行列式化为"对角块"型．

上一节我们学习了行列式的性质，并应用这些性质将一些复杂（主要是指阶数较高）的行列式化简成上（下）三角行列式，从而可以直接求出它们的值。这节课我们来学习另一种化简行列式的方法，称为行列式按行（列）展开，又称 Laplace 展开。

六、行列式按行(列)展开 —— Laplace 展开

这种方法也是把一个复杂的行列式简化，所不同的是这种展开是把一个高阶行列式化为低阶行列式的和。为了学习 Laplace 展开，先引入余子式和代数余子式的概念。

在 n 阶行列式中，把 (i,j) 元 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做 (i,j) 元 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}。

记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，则 A_{ij} 叫做 (i,j) 元 a_{ij} 的代数余子式。

例 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ 中 $(3,2)$ 元 a_{32} 的余子式 $M_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$

代数余子式为 $A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-M_{32}$

引理 一个 n 阶行列式，如果其中第 i 行所有元素除 (i,j) 元 a_{ij} 外都为零，那么该行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积，即

$$D=a_{ij}A_{ij}$$

证明：① 先证 $(i,j)=(1,1)$ 的情形，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

这实际上是 P_{14} 例10中 $k=1$ 的特殊情形，所以有

$$D=a_{11}M_{11} \quad \text{（此特殊情况无须写出 } A_{11}=M_{11}\text{）}$$

② 一般情形

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

变换：把D的第i行依次与第$i-1$行、第$i-2$行、…第1行对调，

这样数a_{ij}就调成$(1,j)$元，调换的次数为$i-1$。

再把第j列依次与第$j-1$列、第$j-2$列、…第1列对调，

这样数a_{ij}就调成$(1,1)$元，调换的次数为$j-1$。

总之，经$i+j-2$次调换，把数a_{ij}调成$(1,1)$元，

所得行列式 $D_1=(-1)^{i+j-2}D=(-1)^{i+j}D$

D_1中$(1,1)$元的余子式就是D中(i,j)元的余子式M_{ij}.

$$D_1=a_{ij}M_{ij}$$

则 $D=(-1)^{i+j}D_1=\underline{(-1)^{i+j}}a_{ij}\underline{M_{ij}}=a_{ij}A_{ij}$

定理3 行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，

即

任一行： $D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$
$=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$

或

任一列： $D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$
$=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$

证明：
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+0+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

根据引理，得

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$$

同理按列证明

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$$

此即行列式按行（列）展开法则.

利用这一法则并结合行列式的性质就可以更快地简化行列式的计算.

例 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$

解：$D\xlongequal[c_4+c_3]{c_1-2c_3}\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}=1\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}\xlongequal{r_2+r_1}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$

$=1\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix}\xlongequal{c_1-c_2}\begin{vmatrix} -8 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}=40$

课外作业：
习题一，4(4)三种方法.

例：求证

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{n\geq i>j\geq 1}(x_i-x_j)$$

证明：数学归纳法

① $n=2$，$D_2=\begin{vmatrix}1&1\\x_1&x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1=\prod\limits_{2\geq i>j\geq 1}(x_i-x_j)$

② 假设 $n-1$ 阶成立，只须证 n 阶成立

$$D_n\overset{r_i-r_{i-1}x_1}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&x_2-x_1&x_3-x_1&\cdots&x_n-x_1\\0&x_2(x_2-x_1)&x_3(x_3-x_1)&\cdots&x_n(x_n-x_1)\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&x_2^{n-2}(x_2-x_1)&x_3^{n-2}(x_3-x_1)&\cdots&x_n^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix}$$

$$\overset{c_i\div(x_i-x_1)}{=\!=\!=}(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_2&x_3&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_2^{n-2}&x_3^{n-2}&\cdots&x_n^{n-2}\end{vmatrix}$$

$\because$ $n-1$ 阶成立

$$\therefore D_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\prod_{n\geq i>j\geq 2}(x_i-x_j)$$

$$=\prod_{n\geq i>j\geq 1}(x_i-x_j)$$

推论：行列式某一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \qquad (i\neq j)$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \qquad (i\neq j)$$

$$a_{j1}A_{j1}+a_{j2}A_{j2}+\cdots+a_{jn}A_{jn}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{j1}} & \boxed{\cdots} & \boxed{a_{jn}} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}$$

$$=\begin{array}{l}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1}} & \boxed{\cdots} & \boxed{a_{in}} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \longrightarrow \text{第}i\text{行} \\ \\ \longrightarrow \text{第}j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \qquad (i\neq j)$$

代数余子式的重要性质：

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=D\delta_{ij}=\begin{cases} D, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

或

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=D\delta_{ij}=\begin{cases} D, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

其中 $\delta_{ij}=\begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$

任意一行(列)数代换行列式某行(列)：

$\det(a_{ij}) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$ 中用

$b_1, b_2, \cdots, b_n$ 依次代替 $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$，可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \boxed{b_1 \quad \cdots \quad b_n} & & \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1A_{i1} + b_2A_{i2} + \cdots + b_nA_{in}$$

同理，用 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 代替 $\det(a_{ij})$ 中的第 j 列，可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \cdots + b_nA_{nj}$$

例 $D = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$ 求 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$ 和 $M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}$.

解：$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3 - r_1]{r_4 + r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2 + c_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$

$M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}=A_{11}-A_{21}+A_{31}-A_{41}$

$$=\begin{vmatrix} \boxed{1} & -5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4+r_3} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\times(-1)^{4+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1-2r_3} -\begin{vmatrix} -1 & 0 & -5 \\ -1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

这节课我们学习了化简行列式的另一种方法：行列式按行(列)展开法则.

小结：

化简行列式 ① 利用行列式的性质将行列式化简成上(下)三角行列式计算.

② 利用行列式按行(列)展开法则化简行列式.

③ ①+②

课后作业：习题5(1)、(2)、(3)；习题7(1)、(6)

习题5(2)，习题6(1)、(2)、(3)，习题8(1)、(6)，习题9（第五版）

七、克拉默法则

在本章的第一节中，我们引入了二阶、三阶行列式表示二元线性方程组和三元线性方程组的解. 在这一节，我们将含有n个未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的n个线性方程的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \qquad (11)$$

的解也用行列式直接表示出来，即克拉默法则.

克拉默法则：如果线性方程组(11)的系数行列式不等于零，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

那么，该方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad \cdots,\quad x_n=\frac{D_n}{D} . \qquad (12)$$

其中，$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

证明将在第二章给出.

例(应用)
$$\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8 \\ x_1-3x_2-6x_4=9 \\ 2x_2-x_3+2x_4=-5 \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0 \end{cases}$$

解：
$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_2]{r_1-2r_2} \begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 & 13 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3+2c_2]{c_1+2c_2} -\begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = 27 \neq 0$$，有唯一解.

$$D_1=\begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=81,\quad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix}=-108$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}=-27,\quad D_4=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix}=27$$

得 $x_1=3,\ x_2=-4,\ x_3=-1,\ x_4=1$

例15（时间充足可讲）

定理4 如果线性方程组(11)的系数行列式 $D\neq 0$，则(11)一定有解，且解是唯一的.

定理4' 如果 ——— 无解或有两个不同的解，则它的系数行列式必为零.

常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 不全为零时，(11) 叫做非齐次线性方程组.

——— 全为零时，——— 齐次线性方程组.

对于齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases} \qquad (13)$$

$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 一定是它的解，这个解叫做齐次方程组(13)的零解.

如果一组不全为零的数是(13)的解，则它叫做齐次方程组(13)的非零解.

齐次线性方程组(13)一定有零解，但不一定有非零解.

定理5 如果齐次线性方程组(13)的系数行列式 $D\neq 0$，则该方程组没有非零解.

定理5' 如果齐次线性方程组(13)有非零解则它的系数行列式必为零.

例 λ取何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases} (5-\lambda)x+2y+2z=0 \\ 2x+(6-\lambda)y=0 \\ 2x+(4-\lambda)z=0 \end{cases}$$

有非零解？

解：由定理5'，只须 $D=0$. 即

$$D=\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 6-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}=(5-\lambda)(6-\lambda)(4-\lambda)-4(4-\lambda)-4(6-\lambda)$$
$$=(5-\lambda)(2-\lambda)(8-\lambda)$$

得 $\lambda=2$、$\lambda=5$ 或 $\lambda=8$.

课后作业：习题一.8(2).9