第一节 向量的内积、长度及正交性

基础

从3维向量的长度夹角.正交性引入n维向量的长度.夹角

一. 内积的定义及性质:

1. 定义1: 设有n维向量 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$,

$y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$, 则向量 x 与 y 的内积.

$$[x, y] \equiv x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

说明:

1). 内积是向量的一种运算, 即

$$[x, y] \equiv x^T y$$

2). n $(n \geq 4)$ 维向量的内积是3维向量数量积的推广, 但是没有3维向量直观的几何意义.

2. 内积的运算性质：

（其中 x, y, z 为 n 维向量，λ 为实数）.

1). $[x, y] = [y, x]$

2). $[\lambda x, y] = \lambda[x, y]$

3). $[x+y, z] = [x, z] + [y, z]$

4). 对 $\forall x$，$[x, x] \geq 0$.

二. 向量的长度及性质：

1. 定义2：令

$$\|x\| \equiv \sqrt{[x, x]} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

称 $\|x\|$ 为 n 维向量 x 的范数（长度）

特别地，$\|x\| = 1$ 为单位向量.

2. 向量的长度的性质：

1). 非负性：对 $\forall x$，$\|x\| \geqslant 0$；

2). 齐次性：$\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

3). 三角不等式：$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

3. n 维向量间的夹角：

n 维向量 x 与 y 间的夹角：

$$\theta = \arccos \frac{[x, y]}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

说明：

1). 向量 x 与 y 正交：$[x, y] = 0$

2). 零向量与任何向量都正交.

例：求 $\alpha = (1, 2, 2, 3)$ 与 $\beta = (3, 1, 5, 1)$ 的夹角.

二. 正交向量组的概念及求法:

1. 正交的概念:

当 $[x, y] = 0$ 时, 称向量 x 与 y 正交.

2. 正交向量组的概念:

若一非零向量组中的向量两两正交, 则称该向量组为正交向量组.

3. 正交向量组的性质:

定理: 若 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是一组两两正交的非零向量, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关.

证明思路: $\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_r\alpha_r = 0$

$\Longrightarrow \lambda_1\underline{\alpha_1^T\alpha_1} + \lambda_2\underline{\alpha_1^T\alpha_2} + \cdots + \lambda_r\underline{\alpha_1^T\alpha_r} = 0$.

4. 向量空间的正交基：

若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是向量空间 V 的一个基，且 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是两两正交的非零向量组，则称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是向量空间 V 的正交基。

5. 规范正交基：

设 n 维向量 $e_1, e_2, \cdots, e_r$ 是向量空间 V 的一个基，如果 $e_1, e_2, \cdots, e_r$ 两两正交且都是单位向量，则称 $e_1, e_2, \cdots, e_r$ 是 V 的一个规范正交基。

6. 求规范正交基的方法：

向量空间 V 的一个基 $\xrightarrow[\text{过程}]{\text{施密特正交化}}$ 一个规范正交基

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是向量空间 V 的一个基，要求 V 的一个规范正交基，即要找一组两两正交的单位向量 $e_1, e_2, \cdots, e_r$，使 $e_1, e_2, \cdots, e_r$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 等价，这样一个问题称为把 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 这个基规范正交化。

若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 为向量空间 V 的一个基，

1). 正交化：取 $b_1 = \alpha_1$，

$$b_2 = \alpha_2 - \frac{[b_1, \alpha_2]}{[b_1, b_1]} b_1$$

$$b_3 = \alpha_3 - \frac{[b_1, \alpha_3]}{[b_1, b_1]} b_1 - \frac{[b_2, \alpha_3]}{[b_2, b_2]} b_2$$

$$\vdots$$

$$b_r = \alpha_r - \frac{[b_1, \alpha_r]}{[b_1, b_1]} b_1 - \cdots - \frac{[b_{r-1}, \alpha_r]}{[b_{r-1}, b_{r-1}]} b_{r-1}$$

则 $b_1, b_2, \cdots, b_r$ 两两正交.

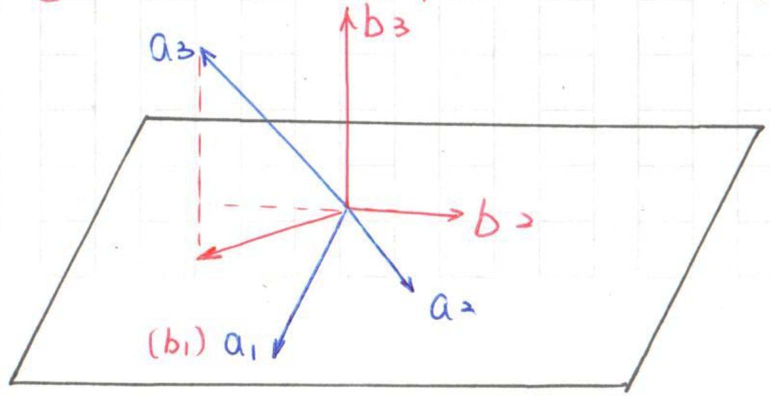
2). 单位化：(规范化)

取 $e_1=\frac{b_1}{\|b_1\|}$，$e_2=\frac{b_2}{\|b_2\|}$，…，$e_r=\frac{b_r}{\|b_r\|}$，则

$e_1, e_2, \cdots, e_r$ 为 V 的一个规范正交基。

上述由线性无关向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 构造出正交向量组 $b_1, b_2, \cdots, b_r$ 的过程称为施密特正交化过程。

结合例2的清晰的立体图示：



四. 正交矩阵与正交变换：

1. 正交矩阵：

1>. 定义：n阶方阵A满足：$A^TA=E$，即$A^{-1}=A^T$，

则称A为正交矩阵；

2>. 性质：

a. A为正交矩阵

$\Longleftrightarrow$ A的列向量均为单位向量且两两正交

$\Longleftrightarrow$ A的行向量均为单位向量且两两正交

b. 若A为正交阵，则$A^{-1}=A^T$也为正交阵

且 $|A|=\pm1$

c. 若A, B均为正交阵，则AB也是正交阵

2. 正交变换：

1). 定义：若 P 为正交阵，则线性变换 $y=Px$ 称为正交变换.

2). 性质：正交变换保持向量的长度不变。

第二节 方阵的特征值与特征向量

一、特征值与特征向量的概念：

1. 定义1：设 A 为 n 阶矩阵，如果数 λ 和 n 维非零列向量 x 使关系式：

$$Ax = \lambda x$$

成立，则数 λ 称为方阵 A 的特征值，非零向量 x 称为 A 的对应于特征值 λ 的特征向量。

说明：

1). 特征向量 $x \neq 0$，特征值问题针对方阵而言；

2). n阶方阵A的特征值，就是使齐次线性方程组 $(A-\lambda E)x=0$ 有非零解的λ值，即满足方程 $|A-\lambda E|=0$ 的λ都是矩阵A的特征值.

齐次线性方程组 $(A-\lambda E)x=0$ 有非零解

$\Longleftrightarrow$ $R(A-\lambda E)<n$ 降秩矩阵

$\Longrightarrow$ $|A-\lambda E|=0$ 不可逆矩阵

3). 方程 $|A-\lambda E|=0$ 是以λ为未知数的一元n次方程，它称为方阵A的特征方程。

即 $$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

记 $f(\lambda)=|A-\lambda E|$ 是λ的n次多项式，称为方阵A的特征多项式。

4). 设n阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则有：

a. $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}\equiv \underbrace{TrA}$

方阵A的迹

b. $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$.

5). 若$\lambda=\lambda_i$为方阵A的一个特征值，则由方程$(A-\lambda_i E)x=0$可求得非零解$x=p_i$，那么p_i就是方阵A的对应于特征值λ_i的特征向量。

2. 求矩阵特征值与特征向量的步骤：

1). 计算方阵 A 的特征多项式：$|A-\lambda E|$；

2). 求特征方程 $|A-\lambda E|=0$ 的全部根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$，即为方阵 A 的全部特征值；

3). 对于特征值 λ_i $(i=1,2,\cdots,n)$，求齐次线性方程组：$(A-\lambda_i E)x=0$ 的非零解，就是方阵 A 的对应于特征值 λ_i 的特征向量。

例 5：特征值无重根的情况

例 6：特征方程有重根的情况

例 7：

二、特征值和特征向量的性质：

1. 若λ是方阵A的特征值，x是A的属于λ的特征向量，则：

1). λ^m是A^m的特征值（m为任意常数）；

2). 当A可逆时，λ^{-1}是A^{-1}的特征值；

3). $\varphi(\lambda)$是$\varphi(A)$的特征值.

2. 设$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$是方阵$A$的$m$个特征值，$p_1, p_2, \cdots, p_m$依次是与之对应的特征向量，如果$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$各不相等，则$p_1, p_2, \cdots, p_m$线性无关。

证明:

1. 1). $\because$ $A\alpha=\lambda\alpha$

$\therefore$ $A(A\alpha)=A(\lambda\alpha)=\lambda(A\alpha)=\lambda^2\alpha$

以此类推，有: $A^m\alpha=\lambda^m\alpha$

故 λ^m是矩阵A^m的特征值，且α是A^m对应于λ^m的特征向量。

2). $\because$ A可逆 且 $A\alpha=\lambda\alpha$

$\therefore$ $\alpha=A^{-1}(\lambda\alpha)=\lambda(A^{-1}\alpha)$ 即 $A^{-1}\alpha=\frac{1}{\lambda}\alpha$

故 λ^{-1}为A^{-1}的特征值，且α是A^{-1}对应于λ^{-1}的特征向量.

37. $\because$ $A\alpha=\lambda\alpha$, $A^k x=\lambda^k x$,

$\therefore$ $\varphi(A)\alpha=(a_0E+a_1A+\cdots+a_mA^m)\alpha$

$=a_0E\alpha+a_1A\alpha+\cdots+a_mA^m\alpha$

$=a_0\alpha+a_1\lambda\alpha+\cdots+a_m\lambda^m\alpha$

$=(a_0+a_1\lambda+\cdots+a_m\lambda^m)\alpha$

$=\varphi(\lambda)\alpha$

故 $\varphi(\lambda)$ 是 $\varphi(A)$ 的特征值.

2. 设存在一组常数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$, 使:

$k_1p_1+k_2p_2+\cdots+k_mp_m=0$.

则:

$Ak_1p_1+Ak_2p_2+\cdots+Ak_mp_m=0$

即 $\lambda_1k_1p_1+\lambda_2k_2p_2+\cdots+\lambda_mk_mp_m=0$

以此类推，

$$\lambda_1^s k_1 p_1 + \lambda_2^s k_2 p_2 + \cdots + \lambda_m^s k_m p_m = 0 \quad (s = 1, 2, \cdots, m-1)$$

即 $(k_1 p_1, k_2 p_2, \cdots, k_m p_m)\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{m-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \cdots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix} = (0, 0, \cdots, 0)$

又 ∵ $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 各不相等

∴ $(k_1 p_1, k_2 p_2, \cdots, k_m p_m) = (0, 0, \cdots, 0)$

即 $k_i p_i = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$

又 ∵ $p_i \neq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$

∴ $k_i = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$

故 向量组 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 线性无关.

注意:

1. 属于不同特征值的特征向量是线性无关的;
2. 属于同一特征值的特征向量的非零线性组合仍是属于这个特征值的特征向量;
3. 矩阵的特征向量总是相对于矩阵的特征值而言的，一个特征值具有的特征向量不唯一;一个特征向量不能属于不同的特征值。

第三节 相似矩阵

一、相似矩阵与相似变换的概念：

定义：设 A、B 都是 n 阶矩阵，若存在可逆矩阵 P，使：$P^{-1}AP=B$，则称 B 是 A 的相似矩阵，或称矩阵 A 与 B 相似，对 A 进行运算 $P^{-1}AP$ 称为对 A 进行相似变换，可逆矩阵 P 称为把 A 变成 B 的相似变换矩阵。

二、相似矩阵与相似变换的性质：

1. 等价关系：

1). 反身性：A与A本身相似；

$$E^{-1}AE = A$$

2). 对称性：若A与B相似，则B与A相似；

$$P^{-1}AP = B \Rightarrow A = PBP^{-1}$$

3). 传递性：若A与B相似，B与C相似，则A与C相似.

$$P^{-1}AP = B,\ Q^{-1}BQ = C$$

$$\Longrightarrow Q^{-1}P^{-1}APQ = C \Rightarrow (PQ)^{-1}A(PQ) = C$$

2. $P^{-1}(A_1A_2)P = (P^{-1}A_1P)(P^{-1}A_2P)$

3. 若 A 与 B 相似，则 A^m 与 B^m 相似，其中 m 为正整数；

$P^{-1}AP=B$

$\Rightarrow P^{-1}A^mP = P^{-1}APP^{-1}AP\cdots P^{-1}AP = B^m$

4. $P^{-1}(k_1A_1+k_2A_2)P = k_1\cdot P^{-1}A_1P + k_2\cdot P^{-1}A_2P$

其中 k_1, k_2 为任意常数.

5. 定理：若 n 阶方阵 A 与 B 相似，则 A 与 B 的特征多项式相同，从而 A 与 B 的特征值亦相同。

推论：若 n 阶方阵 A 与对角阵 $\Lambda = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 相似，则 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 即是 A 的 n 个特征值.

6. 利用对角矩阵计算矩阵多项式：

若 $A=PBP^{-1}$，则：$A^k=PBP^{-1}PBP^{-1}\cdots PBP^{-1}=PB^kP^{-1}$

A的多项式：$\varphi(A)=a_0A^n+a_1A^{n-1}+\cdots+a_{n-1}A+a_nE$

$$=P\cdot\varphi(B)\cdot P^{-1}.$$

特别地，若可逆阵P使：$A=P\Lambda P^{-1}$（Λ为对角阵），则：

$$A^k=P\Lambda^kP^{-1},\quad \varphi(A)=P\cdot\varphi(\Lambda)\cdot P^{-1}$$

其中 $\Lambda^k=\begin{pmatrix}\lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k\end{pmatrix}$，$\varphi(\Lambda)=\begin{pmatrix}\varphi(\lambda_1) & & & \\ & \varphi(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi(\lambda_n)\end{pmatrix}$

7. 定理：设 $f(\lambda)$ 是矩阵A的特征多项式，则：

$$f(A)=0.$$

三. 利用相似变换将方阵对角化:

对 n 阶方阵 A, 若找到可逆阵 P, 使: $P^{-1}AP=\Lambda$.
其中 Λ 为对角阵, 这就称为把方阵 A 对角化。

定理: n 阶方阵 A 与对角阵相似 (A 能对角化)
$\Longleftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量.

推论: 如果 n 阶方阵 A 的 n 个特征值互不相等, 则 A 与对角阵相似.

说明: 如果 A 的特征方程有重根, 此时不一定有 n 个线性无关的特征向量, 从而 A 不一定能对角化; 但如果能找到 n 个线性无关的特征向量, A 还是能对角化的.

补充：相似是矩阵之间的一种关系，它具有很多良好的性质：

1). 若 A 与 B 相似，则：$|A|=|B|$；

2). 若 A 与 B 相似，且 A 可逆，则：B 也可逆，且 A^{-1} 与 B^{-1} 相似；

3). 若 A 与 B 相似，则：kA 与 kB 相似（k 为常数）

4). 若 A 与 B 相似，而 $f(x)$ 为一多项式，则：$f(A)$ 与 $f(B)$ 相似.

例：$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，问 x 为何值时 A 能对角化？

第四节 对称矩阵的对角化

一、对称矩阵的性质：

定理1：对称矩阵的特征值为实数.

证明：设复数λ为对称阵A的特征值，复向量x为对应的特征向量，则：$Ax=\lambda x\ (x\neq 0)$

故 $A\bar{x}=\bar{A}\bar{x}=\overline{Ax}=\overline{\lambda x}=\bar{\lambda}\cdot\bar{x}$

即 $\bar{x}^TAx=\bar{x}^T(Ax)=\bar{x}^T(\lambda x)=\lambda\bar{x}^Tx$

又∵ $\bar{x}^TAx=\bar{x}^TA^Tx=(A\bar{x})^Tx=(\bar{\lambda}\bar{x})^Tx=\bar{\lambda}\bar{x}^Tx$

所以 $(\lambda-\bar{\lambda})\bar{x}^Tx=0$ ∴ $\lambda=\bar{\lambda}$

意义：由于对称阵A的特征值λ_i为实数，所以齐次线性方程组$(A-\lambda_iE)x=0$为实系数方程组，由有实的基础解系.

定理2：设λ_1,λ_2是对称阵A的两个特征值，p_1,p_2是对应的特征向量，若$\lambda_1\neq\lambda_2$，则p_1与p_2正交。

证明：

$\because A p_1=\lambda_1 p_1,\quad A p_2=\lambda_2 p_2 \quad (\lambda_1\neq\lambda_2)$

且 A 为对称阵，即 $A=A^T$

$\therefore \lambda_1 p_1^T=(\lambda_1 p_1)^T=(A p_1)^T=p_1^T A^T=p_1^T A$

即 $\lambda_1 p_1^T p_2=p_1^T A p_2=p_1^T \lambda_2 p_2=\lambda_2 p_1^T p_2$

故 $(\lambda_1-\lambda_2)p_1^T p_2=0$

所以 $p_1^T p_2=0$. 即 p_1与p_2正交.

定理3：设 A 为 n 阶对称阵，λ 是 A 的特征方程的 r 重根，则矩阵 $A-\lambda E$ 的秩 $R(A-\lambda E)=n-r$，从而对应特征值 λ 恰有 r 个线性无关的特征向量。

定理4：设 A 为 n 阶对称阵，则必有正交矩阵 P，使得：

$$P^{-1}AP=\Lambda,$$

其中 Λ 是以 A 的 n 个特征值为对角元素的对角阵。

二. 利用正交矩阵将对角矩阵对角化的方法：

具体步骤：

1. 求出方阵A的全部互不相等的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，它们的重数依次为 $k_1, k_2, \cdots, k_s$，且 $k_1+k_2+\cdots+k_s=n$

2. 对每个 k_i 重特征值 λ_i，求方程 $(A-\lambda_i E)x=0$ 的基础解系，得 k_i 个线性无关的特征向量；

3. 将线性无关的特征向量正交化，单位化；

4. 将 n 个两两正交的单位特征向量构成正交阵 P，使有： $P^{-1}AP=\Lambda$，从而完成对方阵 A 的对角化.

第五节 二次型及其标准形

一. 二次型及其标准形的概念

1. 二次型：含有n个变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$的二次齐次函数

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

称为二次型.

$$\begin{cases} \text{当 } a_{ij} \in \mathbb{C} \text{ 时，} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \text{ 称为复二次型；} \\ \text{当 } a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ 时，} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \text{ 称为实二次型.} \end{cases}$$

2. 二次型的标准形：

只含有平方项的二次型：$f = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_n y_n^2$

称为二次型的标准形（或法式）.

3. 二次型的规范形：

如果标准型的系数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 只在 $-1, 0, 1$ 中取值，则上式称为二次型的规范形.

例：

1> $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_3$

$a_{11} = ?$ $a_{22} = ?$ … $a_{12} = ?$ $a_{23} = ?$

2> $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$

$a_{12} = ?$ $a_{13} = ?$ $a_{23} = ?$ $a_{11} = ?$

二. 二次型的表示方法：

1. 用求和符号表示：

二次型：$f(x_1, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2$

$$+ 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

取 $a_{ij} = a_{ji}$，则：$2a_{ij}x_ix_j = a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i$

于是，$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n$$

$$+ a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n$$

$$+ \cdots + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

2. 用矩阵表示：

$$
\begin{aligned}
f &= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n \\
&\quad + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n \\
&\quad + \cdots + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\
&= x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) \\
&\quad + x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n) \\
&\quad + \cdots + x_n(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n) \\
&= (x_1, x_2, \cdots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

记 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，则：

二次型可记作：$f=x^TAx$，其中A为对称矩阵.

三、二次型的矩阵及秩：

由二次型的矩阵表示形式可知：

$$f=x^TAx$$

则：

在二次型的矩阵表示中，任给一个二次型就唯一地确定一个对称矩阵；反之，任给一个对称矩阵，也可唯一地确定一个二次型。

二次型　　一一对应　　对称矩阵

$$\underbrace{f}_{\text{矩阵}A\text{的二次型}} = x^T \underbrace{A}_{\text{二次型的矩阵}} x$$

二次型 f 的秩：对称矩阵 A 的秩.

四. 化二次型为标准形：

对于二次型，我们讨论的主要问题是：寻求可逆的线性变换，将二次型化为标准形.

设 $\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n. \end{cases}$，记 $C=(c_{ij})_{n\times n}$.

则上述可逆的线性变换可记作 $x = Cy$，

将其代入 $f = x^T A x$，则：

$$f = x^T A x = (Cy)^T A (Cy) = y^T C^T A C y$$

补充定义：

设 A, B 为 n 阶矩阵，若存在可逆阵 C，使：$B = C^T A C$，则称矩阵 A 与 B 合同。

定理：任给可逆矩阵 C，令 $B=C^TAC$，如果 A 为对称矩阵，则 B 也为对称矩阵，

且 $R(B)=R(A)$.

证明：$\because$ A 为对称矩阵　$\therefore$ $A^T=A$.

故 $B^T=(C^TAC)^T=C^TAC=B$

即 B 也是对称矩阵.

说明：

1. 二次型经可逆变换 $x=Cy$ 后，其秩不变，但 f 的矩阵由 A 变为 $B=C^TAC$；

2. 要使二次型 f 经可逆变换 $x=Cy$ 变成标准形，就是要使：

$$y^TC^TACy = k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + \cdots + k_ny_n^2$$

$$= (y_1, y_2, \cdots, y_n)\begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

也就是要使 C^TAC 成为对角阵.

主要问题：

对于已知的对称阵 A，寻求可逆矩阵 C，使该 C^TAC 成为对角阵。

定理：任给二次型 $f=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$，总存在正交变换 $x=Py$，使 f 化为标准形：

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 f 的矩阵 A 的特征值

推论：

任给二次型 $f=x^TAx$，总有可逆变换 $x=Cz$，使 $f(Cz)$ 成为规范形.

用正交变换化二次型为标准形的步骤：

1. 将二次型表示成矩阵形式 $f=x^TAx$，求出 A；

2. 求出 A 的所有特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$；

3. 求出对应于特征值的特征向量 $\xi_1, \cdots, \xi_n$；

4. 将特征向量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 正交化、单位化，得 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$，并记 $C=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$；

5. 作正交变换 $x=Cy$，则得 f 的标准形：

$$f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$$

6. 令 $z_1=\sqrt{|\lambda_1|}\, y_1$，$z_2=\sqrt{|\lambda_2|}\, y_2$，$\cdots$，$z_n=\sqrt{|\lambda_n|}\cdot y_n$，则 f 的规范形为：

$$f=\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|} z_1^2+\frac{\lambda_2}{|\lambda_2|} z_2^2+\cdots+\frac{\lambda_n}{|\lambda_n|} z_n^2$$

第六节 用配方法化二次型成标准形

拉格朗日配方法的具体步骤：

1. 若二次型含有 x_i 的平方项，则先把含有 x_i 的乘积项集中，然后配方；再对其余的变量也同样进行，直到都配成平方项为止，经过非退化线性变换，就得到标准形；

2. 若二次型中不含有平方项，但是 $a_{ij} \neq 0\ (i \neq j)$，

则先作可逆线性变换 $\begin{cases} x_i = y_i - y_j, \\ x_j = x_i + y_j, \\ x_k = y_k \end{cases}$ $(k=1,\cdots,n 且 k \neq i,j)$

化二次型为含有平方项的二次型，然后再按 1 中的方法配方。

说明：

1. 将一个二次型化为标准形，可以用正交变换法，也可以用拉格朗日配方法，或者其它方法，这取决于问题的要求；

2. 如果要求找出一个正交矩阵，应使用正交变换法；

3. 如果只需要找出一个可逆的线性变换，那么各种方法都可以使用；

4. 两种方法的不同特点：

正交变换法：步骤固定，计算量较大；

拉格朗日配方法：技巧性强，计算简便.

5. 使用不同的方法，所得到的标准形可能不同，但标准形中含有的项数必定相同，项数等于所给二次型的秩。

第七节 正定二次型

一. 惯性定理：

设有实二次型 $f=x^TAx$，它的秩为 r，有两个实的可逆变换：$x=Cy$，及，$x=Pz$

使：$f=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ry_r^2 \quad (k_i\neq 0)$

及 $f=\lambda_1z_1^2+\lambda_2z_2^2+\cdots+\lambda_rz_r^2 \quad (\lambda_i\neq 0)$

则 $k_1,\cdots,k_r$ 中正数的个数与 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 中正数的个数相等。

1). 二次型的正惯性指数：标准形中正系数的个数

2). 二次型的负惯性指数：标准形中负系数的个数

二. 正(负)定二次型的概念:

定义: 设有实二次型 $f(x) = x^T A x$,

1). 若对 $\forall x \neq 0$, 都有 $f(x) > 0$, 则称 f 为正定二次型, 且对称矩阵 A 是正定的;

2). 若对 $\forall x \neq 0$, 都有 $f(x) < 0$, 则称 f 为负定二次型, 且对称矩阵 A 是负定的.

例: 1). $f = x^2 + 4y^2 + 16z^2$　正定

2). $f = -x_1^2 - 3x_2^2$　负定

三. 正(负)定二次型的判别:

定理: 实二次型 $f=x^TAx$ 为正定二次型

$\Longleftrightarrow$ f 的标准形的 n 个系数全为正.

$\Longleftrightarrow$ f 的惯性指数等于 n.

推论:

对称矩阵 A 为正定矩阵

$\Longleftrightarrow$ A 的特征值全为正.

霍尔维茨定理：

对称矩阵A为正定矩阵

$\Longleftrightarrow$ A的各阶主子式均为正，

即 $a_{11}>0$ ，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0$ ，$\cdots$ ，$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}>0$.

对称矩阵A为负定矩阵

$\Longleftrightarrow$ 奇数阶主子式为负，而偶数阶主子式为正.

即 $(-1)^r \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}>0$ ，$(r=1,2,\cdots,n)$

正定矩阵具有以下一些简单性质：

1. 设 A 为正定实对称阵，则：A^T，A^{-1}，A^* 均为正定矩阵；

2. 若 A，B 均为 n 阶正定矩阵，则：$A+B$ 也为正定。

正定二次型（正定矩阵）的判别方法：

1. 定义法；

2. 顺次主子式判别法；

3. 特征值判别法。

第一节 线性空间的定义与性质

一、线性空间的定义：

线性空间是线性代数最基本的概念之一，也是一个抽象的概念，它是向量空间概念的推广。

线性空间是为了解决实际问题而引入的，它是某一类事物从量的方面的一个抽象，即把实际问题看作向量空间，进而通过研究向量空间来解决实际问题。

定义：设 V 是一个非空集合，$\mathbb{R}$ 为实数域.

1). 如果对 $\forall \alpha, \beta \in V$，总有唯一的 $\gamma \in V$ 与之对应，称 γ 为 α 与 β 的和，记作 $\gamma = \alpha \oplus \beta$；

2). 如果对 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$，$\forall \alpha \in V$，总有唯一的 $\delta \in V$ 与之对应，称 δ 为 λ 与 α 的积，记作 $\delta = \lambda \circ \alpha$；

如果上述的两种运算满足以下八条运算规律，那么 V 就称为数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.

设 $\alpha, \beta, \gamma \in V$ 且 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

1). 加法的交换律： $\alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha$；

2). 加法的结合律：$(\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma = \alpha \oplus (\beta \oplus \gamma)$

3). 存在零元素：$\exists\, 0 \in V$，对 $\forall \alpha \in V$，有：

$$\alpha \oplus 0 = 0 \oplus \alpha = \alpha$$

4). 存在负元素：对 $\forall \alpha \in V$，$\exists$ 负元素 $\beta \in V$，使：

$$\alpha \oplus \beta = 0$$

5). 存在单位元素：$1 \circ \alpha = \alpha$

6). 数乘的结合律：$\lambda \circ (\mu \circ \alpha) = (\lambda\mu) \circ \alpha$

7). 数乘的分配律：$(\lambda + \mu) \circ \alpha = \lambda \circ \alpha + \mu \circ \alpha$

8). 数乘的分配律：$\lambda \circ (\alpha \oplus \beta) = \lambda \circ \alpha \oplus \lambda \circ \beta$

说明：

1. 凡满足以上八条规律的加法及数乘运算，称为线性运算；

2. 线性空间中的元素不一定是有序数组（向量）；

3. 线性空间的判定方法：

1). 一个非空集合，如果定义的加法和数乘运算是通常的实数间的加乘运算，则只需检验对运算的封闭性；

2). 一个非空集合，如果定义的加法和数乘运算不是通常的实数间的加乘运算，则必须检验是否满足八条线性运算规律。

例1：实数域$\mathbb{R}$上的全体$m\times n$矩阵，对矩阵的加法和数乘运算构成线性空间，记为$\mathbb{R}^{m\times n}$.

例2：次数不超过n的全体多项式，对多项式的加法、数乘运算构成线性空间，记为$P[x]_n$

即 $P[x]_n \equiv \{p = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_n, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$

例3：非空集合：

$V = \{p = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_n, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbb{R} 且 a_n \neq 0\}$

$0 \cdot p = 0 \cdot x^n + \cdots + 0 \cdot x + 0 \notin V$

例4：全体正弦函数的集合$S[x]$，对于通常的函数加法及数乘运算构成线性空间.

即 $S[x] \equiv \{s = A \cdot \sin(x + B) \mid A, B \in \mathbb{R}\}$

例5：正实数的全体，记作 $\mathbb{R}^+$，在其中定义加法及数乘运算为：

$$a \oplus b \equiv ab \quad (a, b \in \mathbb{R}^+)$$

$$\lambda \circ a \equiv a^\lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}^+)$$

解：

a>. 对加法的封闭性：

$\forall a, b \in \mathbb{R}^+$，有：$a \oplus b = ab \in \mathbb{R}^+$；

b>. 对数乘的封闭性：

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}^+$，有：$\lambda \circ a = a^\lambda \in \mathbb{R}^+$

二、线性空间的性质：

1. 零元素的唯一性；反证法

2. 负元素的唯一性；反证法

3. $\underset{\text{数}0}{0}\cdot\alpha=\underset{\text{零元素}}{0}$；$\underset{\text{数}-1}{(-1)}\alpha=\underbrace{-\alpha}_{\text{负元素}}$；$\lambda\underset{\text{零元素}}{0}=\underset{\text{零元素}}{0}$.

4. 如果 $\lambda\alpha=0$，则 $\alpha=0$ 或 $\lambda=0$.

三、线性空间的子空间：

定义：设 V 是一个线性空间，L 是 V 的一个非空子集，如果 L 对于 V 中所定义的加法和数乘两种运算也构成一个线性空间，则称 L 为 V 的子空间

定理：

非空子集人是线性空间V的子空间

$\Longleftrightarrow$ 人对于V中的线性运算封闭.

第二节 维数、基与坐标

一、线性空间的基与维数：

定义：在线性空间V中，如果存在n个元素
$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$满足：

1）$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性无关；

2）V中任一元素α总可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性表示。

那么，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$就称为线性空间$V$的一个基，$n$称为线性空间$V$的维数.

说明:

1. 只含一个零元素的线性空间没有基，规定它的维数为0;

2. 维数为n的线性空间称为n维线性空间，记作V_n;

3. 线性空间的维数可以是无穷维，即存在无穷维的线性空间;

4. 若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$为$V_n$的一个基，则$V_n$可表示为:

$$V_n = \{\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n \mid x_1, x_2, \cdots, x_n \in R\}$$

二. 元素在给定基下的坐标:

定义: 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是线性空间 V_n 的一个基,
对 $\forall \alpha \in V_n$, 总有且仅有一组有序数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 使得:

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$$

则有序数组 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 称为元素 α 在 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 这个基下的坐标, 并记作

$$\alpha = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$$

注意:

线性空间中的元素在一个基下对应的坐标是唯一的; 在不同基下的坐标一般不同.

二. 线性空间的同构:

定义: 设U. V是两个线性空间, 如果它们的元素之间有一一对应关系, 且这个对应关系保持线性组合的对应, 那么就称为线性空间U与V同构。

例: n维线性空间V_n与n维向量空间$\mathbb{R}^n$同构.

解: 1).
$$V_n: \quad \alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$$
$$\mathbb{R}^n: \quad x = (x_1, \ x_2, \ \cdots, \ x_n)^T$$

2). 设$\alpha \leftrightarrow (x_1, \cdots, x_n)^T$, $\beta \leftrightarrow (y_1, \cdots, y_n)^T$, 则:
$$\alpha+\beta \leftrightarrow (x_1, \cdots, x_n)^T + (y_1, \cdots, y_n)^T$$
$$\lambda\alpha \leftrightarrow \lambda(x_1, \cdots, x_n)^T$$

结论：

1. 数域P上任意两个线性空间都同构；

2. 同构的线性空间具有反身性、对称性及传递性；

3. 同维数的线性空间必同构。

同构的意义：

在线性空间的抽象讨论中，无论构成线性空间的元素是什么，其中的运算是如何定义的，我们所关心的只是这些运算的代数性质。从这个意义上可以说，同构的线性空间是可以不加区别的，而有限维线性空间唯一本质的特征就是它的维数。

第三节 基变换与坐标变换

一. 基变换公式与过渡矩阵：

1. 基变换公式：

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 及 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 是线性空间 V_n 的两个基，且

$$\begin{cases} \beta_1 = p_{11}\alpha_1 + p_{21}\alpha_2 + \cdots + p_{n1}\alpha_n \\ \beta_2 = p_{12}\alpha_1 + p_{22}\alpha_2 + \cdots + p_{n2}\alpha_n \\ \vdots \\ \beta_n = p_{1n}\alpha_1 + p_{2n}\alpha_2 + \cdots + p_{nn}\alpha_n \end{cases}$$

此公式称为基变换公式.

将其用矩阵符号可表示为：

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{n1}\\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = P^T \cdot \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

或 $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) P$

P 称为由基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的过渡矩阵.

二. 坐标变换公式：

定理：设 V_n 中的元素 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，在基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$

下的坐标为 $(x_1', x_2', \cdots, x_n')^T$，若两个基满足关系式：

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) P$$

则有坐标变换公式：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \quad 或 \quad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

例：V_2 有两个基：α_1, α_2；β_1, β_2

若已知： $\beta_1 = 1 \cdot \alpha_1 - 2\alpha_2$；

$\beta_2 = 3 \cdot \alpha_1 + 1 \cdot \alpha_2$.

则：

由基 α_1, α_2 到基 β_1, β_2 的过渡矩阵为 $P=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$；

写成矩阵表示式为：

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = P^T \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

或 $(\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1, \alpha_2) P = (\alpha_1, \alpha_2) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

若已知元素 α 在 α_1, α_2 下的坐标为 $(3, 0)^T$，则：

α 在 β_1, β_2 下的坐标为：

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

第四节. 线性变换

一. 线性变换的概念:

1. 映射的定义:

设有两个非空集合 A, B. 如果对于 A 中任一元素 α, 按照一定规则, 总有 B 中一个确定的元素 β 和它对应, 那么这个对应规则称为从集合 A 到集合 B 的变换(或映射), 记作

$$\beta = T(\alpha) \quad 或 \quad \beta = T\alpha$$

设 $\alpha \in A$, $T(\alpha) = \beta$ 则称变换 T 把元素 α 变为 β, β 称为 α 在变换 T 下的象, α 称为 β 在变换 T 下的源.

A称为变换T的源集，象的全体所构成的集合称为象集，记作 $T(A)$

即 $T(A)=\{\beta=T(\alpha)\mid\alpha\in A\}$

2. 从线性空间 V_n 到 U_m 的线性变换：

定义：设 V_n, U_m 分别为实数域上的 n 维和 m 维线性空间，T 是一个从 V_n 到 U_m 的变换，如果变换 T 满足：

1> $\forall\alpha_1,\alpha_2\in V_n$，有：$T(\alpha_1+\alpha_2)=T(\alpha_1)+T(\alpha_2)$；

2> $\forall\alpha\in V_n$, $k\in\mathbb{R}$，有：$T(k\alpha)=k\cdot T(\alpha)$

则称 T 为从 V_n 到 U_m 的线性变换.

说明：

1）线性变换就是保持线性组合的对应的变换；

$$T(k\cdot\alpha+l\cdot\beta)=k\cdot T(\alpha)+l\cdot T(\beta)$$

2）一般用黑体大写字母T，A，B，… 代表线性变换，$T(\alpha)$ 或 $T\alpha$ 代表元素 α 在变换T下的象.

3.从线性空间到自身的线性变换：

如果 $U_m=V_n$，那么T是一个从线性空间 V_n 到其自身的线性变换，称为线性空间 V_n 中的线性变换。

二. 线性变换的性质：

1. $T(0)=0$，$T(-\alpha)=-T(\alpha)$；

2. 若 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$，则：

$$T\beta=k_1T\alpha_1+k_2T\alpha_2+\cdots+k_mT\alpha_m$$

3. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，则：$T\alpha_1,T\alpha_2,\cdots,T\alpha_m$ 亦线性相关；

   若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，则：$T\alpha_1,T\alpha_2,\cdots,T\alpha_m$ 不一定线性无关.

4. 线性变换 T 的象集 $T(V_n)$ 是一个线性空间，称为线性变换 T 的象空间；

5. 使$T\alpha=0$的α的全体构成的集合：

$$S_T=\{\alpha \mid \alpha\in V_n, T\alpha=0\}$$

是V_n的子空间，S_T称为线性变换T的核.

第五节 线性变换的矩阵表示式

一. 线性变换的矩阵表示式：

1. $\mathbb{R}^n$中n阶矩阵可确定线性变换：

设n阶矩阵：$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$，定义$\mathbb{R}^n$中的

变换$y=T(x)$为$T(x)=Ax$，$(x\in\mathbb{R}^n)$，

则T为线性变换.

2. 确定线性变换的n阶矩阵的构成特点：

设 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 为单位坐标向量，那么

$$\alpha_i = A e_i = T(e_i)$$

因此，如果一个线性变换 T 有关系式 $T(x) = Ax$，那么矩阵 A 应以 $T(e_i)$ 为列向量.

3. 结论：

$\mathbb{R}^n$ 中任何线性变换 T，都可用关系式 $T(x) = Ax$ 表示，

其中 $A = (T(e_1), T(e_2), \cdots, T(e_n)) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

二. 线性变换在给定基下的矩阵：

定义：设 T 是线性空间 V_n 中的线性变换，在 V_n 中取定一个基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，如果这个基在变换 T 下的象为：

$$
\begin{cases}
T(\alpha_1) = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \cdots + a_{n1}\alpha_n \\
T(\alpha_2) = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{n2}\alpha_n \\
\quad\vdots \\
T(\alpha_n) = a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \cdots + a_{nn}\alpha_n
\end{cases}
$$

记 $T(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (T(\alpha_1), T(\alpha_2), \cdots, T(\alpha_n))$

即 $T(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)A$

则 A 称为线性变换 T 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的矩阵.

结论：

在V_n中取定一个基后，由线性变换T可唯一地确定一个矩阵A，由一个矩阵A也可唯一地确定一个线性变换T。

在给定一个基的条件下，线性变换与矩阵是一一对应的。

二、线性变换在不同基下的矩阵：

定理：设线性空间V_n中取定两个基：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$和$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$，由基$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$到基$\beta_1, \cdots, \beta_n$的过渡矩阵为P，$V_n$中的线性变换T在这两个基下的矩阵依次为A和B，则：$B = P^{-1}AP$.