第五章　相似矩阵及二次型

1. 试用施密特法把下列向量组正交化:

(1) $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 4\\1 & 3 & 9\end{pmatrix}$;

解　根据施密特正交化方法,

$$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2-\frac{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{a}_2]}{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_3-\frac{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{a}_3]}{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1-\frac{[\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{a}_3]}{[\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_2]}\boldsymbol{b}_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

(2) $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\0 & -1 & 1\\-1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

解　根据施密特正交化方法,

$$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2-\frac{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{a}_2]}{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_3-\frac{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{a}_3]}{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1-\frac{[\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{a}_3]}{[\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_2]}\boldsymbol{b}_2=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1\\3\\3\\4\end{pmatrix}.$$

2. 下列矩阵是不是正交阵:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$;

解　此矩阵的第一个行向量非单位向量, 故不是正交阵.

(2) $\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$.

解　该方阵每一个行向量均是单位向量, 且两两正交, 故为正交阵.

3. 设 $\boldsymbol{x}$ 为 n 维列向量, $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}=1$, 令 $H=E-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T$, 证明 H 是对称的正交阵.

证明　因为

$$H^T=(E-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T)^T=E-2(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T)^T=E-2(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T)^T$$
$$=E-2(\boldsymbol{x}^T)^T\boldsymbol{x}^T=E-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T,$$

所以 H 是对称矩阵.

因为

$$\begin{aligned} H^TH=HH&=(E-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T)(E-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T) \\ &=E-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T+(2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T)(2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T) \\ &=E-4\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T+4\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}^T \\ &=E-4\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T+4\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \\ &=E, \end{aligned}$$

所以 H 是正交矩阵.

4. 设 A 与 B 都是 n 阶正交阵, 证明 AB 也是正交阵.

证明　因为 A, B 是 n 阶正交阵, 故 $A^{-1}=A^T$, $B^{-1}=B^T$,

$$(AB)^T(AB)=B^TA^TAB=B^{-1}A^{-1}AB=E,$$

故 AB 也是正交阵.

5. 求下列矩阵的特征值和特征向量:

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

解 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda+1)^3$,

故 A 的特征值为$\lambda=-1$(三重).

对于特征值$\lambda=-1$，由

$$A+E=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得方程$(A+E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系 $\boldsymbol{p}_1=(1, 1, -1)^T$，向量 $\boldsymbol{p}_1$ 就是对应于特征值 $\lambda=-1$ 的特征值向量.

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$;

解 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 1-\lambda & 3 \\ 3 & 3 & 6-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda(\lambda+1)(\lambda-9)$,

故 A 的特征值为$\lambda_1=0$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=9$.

对于特征值$\lambda_1=0$，由

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得方程 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系 $\boldsymbol{p}_1=(-1, -1, 1)^T$，向量 $\boldsymbol{p}_1$ 是对应于特征值$\lambda_1=0$ 的特征值向量.

对于特征值$\lambda_2=-1$，由

$$A+E=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得方程$(A+E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系 $\boldsymbol{p}_2=(-1, 1, 0)^T$，向量 $\boldsymbol{p}_2$ 就是对应于特征值 $\lambda_2=-1$ 的特征值向量.

对于特征值$\lambda_3=9$，由

$$A-9E=\begin{pmatrix}-8&2&3\\2&-8&3\\3&3&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得方程$(A-9E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系$\boldsymbol{p}_3=(1/2,\ 1/2,\ 1)^T$，向量$\boldsymbol{p}_3$就是对应于特征值$\lambda_3=9$的特征值向量.

(3) $\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$.

解 $$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda&0&0&1\\0&-\lambda&1&0\\0&1&-\lambda&0\\1&0&0&-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2,$$

故A的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=-1$, $\lambda_3=\lambda_4=1$.

对于特征值$\lambda_1=\lambda_2=-1$，由

$$A+E=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

得方程$(A+E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系$\boldsymbol{p}_1=(1, 0, 0, -1)^T$, $\boldsymbol{p}_2=(0, 1, -1, 0)^T$，向量$\boldsymbol{p}_1$和$\boldsymbol{p}_2$是对应于特征值$\lambda_1=\lambda_2=-1$的线性无关特征值向量.

对于特征值$\lambda_3=\lambda_4=1$，由

$$A-E=\begin{pmatrix}-1&0&0&1\\0&-1&1&0\\0&1&-1&0\\1&0&0&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

得方程$(A-E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系$\boldsymbol{p}_3=(1, 0, 0, 1)^T$, $\boldsymbol{p}_4=(0, 1, 1, 0)^T$，向量$\boldsymbol{p}_3$和$\boldsymbol{p}_4$是对应于特征值$\lambda_3=\lambda_4=1$的线性无关特征值向量.

6. 设A为n阶矩阵，证明A^T与A的特征值相同.

证明 因为

$$|A^T-\lambda E|=|(A-\lambda E)^T|=|A-\lambda E|^T=|A-\lambda E|,$$

所以A^T与A的特征多项式相同，从而A^T与A的特征值相同.

7. 设n阶矩阵A、B满足$R(A)+R(B)<n$，证明A与B有公共的特

征值, 有公共的特征向量.

证明 设 $R(A)=r$, $R(B)=t$, 则 $r+t<n$.

若 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_{n-r}$ 是齐次方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系, 显然它们是 A 的对应于特征值$\lambda=0$ 的线性无关的特征向量.

类似地, 设 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_{n-t}$ 是齐次方程组 $B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系, 则它们是 B 的对应于特征值$\lambda=0$ 的线性无关的特征向量.

由于$(n-r)+(n-t)=n+(n-r-t)>n$, 故 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-r}, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_{n-t}$ 必线性相关. 于是有不全为 0 的数 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}, l_1, l_2, \cdots, l_{n-t}$, 使

$$k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{a}_{n-r}+l_1\boldsymbol{b}_1+l_2\boldsymbol{b}_2+\cdots+l_{n-r}\boldsymbol{b}_{n-r}=\boldsymbol{0}.$$

记 $$\boldsymbol{\gamma}=k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{a}_{n-r}=-(l_1\boldsymbol{b}_1+l_2\boldsymbol{b}_2+\cdots+l_{n-r}\boldsymbol{b}_{n-r}),$$

则 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$ 不全为 0, 否则 $l_1, l_2, \cdots, l_{n-t}$ 不全为 0, 而

$$l_1\boldsymbol{b}_1+l_2\boldsymbol{b}_2+\cdots+l_{n-r}\boldsymbol{b}_{n-r}=\boldsymbol{0},$$

与 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_{n-t}$ 线性无关相矛盾.

因此, $\boldsymbol{\gamma}\neq\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{\gamma}$是 A 的也是 B 的关于$\lambda=0$ 的特征向量, 所以 A 与 B 有公共的特征值, 有公共的特征向量.

8. 设 $A^2-3A+2E=O$, 证明 A 的特征值只能取 1 或 2.

证明 设λ是 A 的任意一个特征值, $\boldsymbol{x}$ 是 A 的对应于λ的特征向量, 则

$$(A^2-3A+2E)\boldsymbol{x}=\lambda^2\boldsymbol{x}-3\lambda\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{x}=(\lambda^2-3\lambda+2)\boldsymbol{x}=0.$$

因为 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 所以$\lambda^2-3\lambda+2=0$, 即$\lambda$是方程$\lambda^2-3\lambda+2=0$ 的根, 也就是说$\lambda=1$ 或$\lambda=2$.

9. 设 A 为正交阵, 且$|A|=-1$, 证明$\lambda=-1$ 是 A 的特征值.

证明 因为 A 为正交矩阵, 所以 A 的特征值为-1 或 1.

因为$|A|$等于所有特征值之积, 又$|A|=-1$, 所以必有奇数个特征值为-1, 即$\lambda=-1$ 是 A 的特征值.

10. 设$\lambda\neq0$ 是 m 阶矩阵 $A_{m\times n}B_{n\times m}$ 的特征值, 证明λ也是 n 阶矩阵 BA 的特征值.

证明 设 $\boldsymbol{x}$ 是 AB 的对应于$\lambda\neq0$ 的特征向量, 则有

$$(AB)\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x},$$

于是 $$B(AB)\boldsymbol{x}=B(\lambda\boldsymbol{x}),$$

或 $$BA(B\boldsymbol{x})=\lambda(B\boldsymbol{x}),$$
从而λ是 BA 的特征值，且 $B\boldsymbol{x}$ 是 BA 的对应于λ的特征向量.

11．已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 1, 2, 3，求$|A^3-5A^2+7A|$.

解　令$\varphi(\lambda)=\lambda^3-5\lambda^2+7\lambda$，则$\varphi(1)=3$，$\varphi(2)=2$，$\varphi(3)=3$ 是$\varphi(A)$的特征值，故
$$|A^3-5A^2+7A|=|\varphi(A)|=\varphi(1)\cdot\varphi(2)\cdot\varphi(3)=3\times2\times3=18.$$

12．已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 1, 2, −3，求$|A^*+3A+2E|$.

解　因为$|A|=1\times2\times(-3)=-6\neq0$，所以 A 可逆，故
$$A^*=|A|A^{-1}=-6A^{-1},$$
$$A^*+3A+2E=-6A^{-1}+3A+2E.$$
令$\varphi(\lambda)=-6\lambda^{-1}+3\lambda^2+2$，则$\varphi(1)=-1$, $\varphi(2)=5$, $\varphi(-3)=-5$ 是$\varphi(A)$的特征值，故
$$|A^*+3A+2E|=|-6A^{-1}+3A+2E|=|\varphi(A)|$$
$$=\varphi(1)\cdot\varphi(2)\cdot\varphi(-3)=-1\times5\times(-5)=25.$$

13．设 A、B 都是 n 阶矩阵，且 A 可逆，证明 AB 与 BA 相似.

证明　取 $P=A$，则
$$P^{-1}ABP=A^{-1}ABA=BA,$$
即 AB 与 BA 相似.

14．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&1&x\\4&0&5\end{pmatrix}$可相似对角化，求 x.

解　由
$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&1\\3&1-\lambda&x\\4&0&5-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda-6),$$
得 A 的特征值为 $\lambda_1=6$, $\lambda_2=\lambda_3=1$.

因为 A 可相似对角化，所以对于 $\lambda_2=\lambda_3=1$，齐次线性方程组$(A-E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有两个线性无关的解，因此 $R(A-E)=1$．由

$$(A-E)=\begin{pmatrix}1&0&1\\3&0&x\\4&0&4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&x-3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

知当 $x=3$ 时 $R(A-E)=1$，即 $x=3$ 为所求.

15. 已知 $\boldsymbol{p}=(1, 1, -1)^T$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量.

(1)求参数 a, b 及特征向量 $\boldsymbol{p}$ 所对应的特征值;

解　设 λ 是特征向量 $\boldsymbol{p}$ 所对应的特征值，则

$$(A-\lambda E)\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0},\ \text{即}\begin{pmatrix}2-\lambda&-1&2\\5&a-\lambda&3\\-1&b&-2-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

解之得 $\lambda=-1, a=-3, b=0$.

(2)问 A 能不能相似对角化？并说明理由.

解　由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&-1&2\\5&-3-\lambda&3\\-1&0&-2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^3,$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$.

由

$$A-E=\begin{pmatrix}1&-1&2\\5&-2&3\\-1&b&-1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

知 $R(A-E)=2$，所以齐次线性方程组 $(A-E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系只有一个解向量. 因此 A 不能相似对角化.

16. 试求一个正交的相似变换矩阵，将下列对称阵化为对角阵:

(1) $\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}$;

解　将所给矩阵记为 A. 由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&-2&0\\-2&1-\lambda&-2\\0&-2&-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+2),$$

得矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=-2, \lambda_2=1, \lambda_3=4$.

对于$\lambda_1=-2$，解方程$(A+2E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0,$$

得特征向量$(1, 2, 2)^T$，单位化得 $\boldsymbol{p}_1=(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})^T$.

对于$\lambda_2=1$，解方程$(A-E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0,$$

得特征向量$(2, 1, -2)^T$，单位化得 $\boldsymbol{p}_2=(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})^T$.

对于$\lambda_3=4$，解方程$(A-4E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0,$$

得特征向量$(2, -2, 1)^T$，单位化得 $\boldsymbol{p}_3=(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})^T$.

于是有正交阵 $P=(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$，使 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(-2, 1, 4)$.

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

解　将所给矩阵记为 A. 由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda-10),$$

得矩阵 A 的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=10$.

对于$\lambda_1=\lambda_2=1$，解方程$(A-E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

得线性无关特征向量$(-2, 1, 0)^T$和$(2, 0, 1)^T$，将它们正交化、单位化得

$$\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0)^T,\quad \boldsymbol{p}_2=\frac{1}{3\sqrt{5}}(2, 4, 5)^T.$$

对于$\lambda_3=10$，解方程$(A-10E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

得特征向量$(-1, -2, 2)^T$，单位化得 $\boldsymbol{p}_3=\frac{1}{3}(-1,-2,2)^T$.

于是有正交阵 $P=(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$，使 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(1, 1, 10)$.

17. 设矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$与$\Lambda=\begin{pmatrix} 5 & & \\ & -4 & \\ & & y \end{pmatrix}$相似，求 x，y；并求一个正交阵 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$.

解 已知相似矩阵有相同的特征值，显然$\lambda=5$, $\lambda=-4$, $\lambda=y$ 是Λ的特征值，故它们也是 A 的特征值. 因为$\lambda=-4$ 是 A 的特征值，所以

$$|A+4E|=\begin{vmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & x+4 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix}=9(x-4)=0,$$

解之得 $x=4$.

已知相似矩阵的行列式相同，因为

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & -4 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{vmatrix}=-100,\ |\Lambda|=\begin{vmatrix} 5 & & \\ & -4 & \\ & & y \end{vmatrix}=-20y,$$

所以$-20y=-100$, $y=5$.

对于$\lambda=5$，解方程$(A-5E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得两个线性无关的特征向量$(1, 0, -1)^T$, $(1, -2, 0)^T$. 将它们正交化、单位化得

$$\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^T,\quad \boldsymbol{p}_2=\frac{1}{3\sqrt{2}}(1,-4,1)^T.$$

对于$\lambda=-4$，解方程$(A+4E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得特征向量$(2, 1, 2)^T$，单位化得 $\boldsymbol{p}_3=\frac{1}{3}(2,1,2)^T$.

于是有正交矩阵 $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$，使 $P^{-1}AP=\Lambda$.

18. 设 3 阶方阵 A 的特征值为 $\lambda_1=2, \lambda_2=-2, \lambda_3=1$；对应的特征向量依次为 $\boldsymbol{p}_1=(0, 1, 1)^T, \boldsymbol{p}_2=(1, 1, 1)^T, \boldsymbol{p}_3=(1, 1, 0)^T$，求 A.

解　令 $P=(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$，则 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(2, -2, 1)=\Lambda$, $A=P\Lambda P^{-1}$.

因为

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

所以

$$A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -4 & 5 & -3 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

19. 设 3 阶对称阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1, \lambda_2=-1, \lambda_3=0$；对应 λ_1、λ_2 的特征向量依次为 $\boldsymbol{p}_1=(1, 2, 2)^T, \boldsymbol{p}_2=(2, 1, -2)^T$，求 A.

解　设 $A=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$，则 $A\boldsymbol{p}_1=2\boldsymbol{p}_1, A\boldsymbol{p}_2=-2\boldsymbol{p}_2$，即

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3=1 \\ x_2+2x_4+2x_5=2 \\ x_3+2x_5+2x_6=2 \end{cases}, \text{---①}$$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-2x_3=-2 \\ 2x_2+x_4-2x_5=-1 \\ 2x_3+x_5-2x_6=2 \end{cases}. \text{---②}$$

再由特征值的性质，有

$$x_1+x_4+x_6=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0. \text{---③}$$

由①②③解得

$$x_1=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}x_6,\quad x_2=\frac{1}{2}x_6,\quad x_3=\frac{2}{3}-\frac{1}{4}x_6,$$

$$x_4=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}x_6,\quad x_5=\frac{2}{3}+\frac{1}{4}x_6.$$

令 $x_6=0$，得 $x_1=-\frac{1}{3}, x_2=0$，$x_3=\frac{2}{3}$，$x_4=\frac{1}{3}$，$x_5=\frac{2}{3}$.

因此 $$A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&2\\2&2&0\end{pmatrix}.$$

20．设 3 阶对称矩阵 A 的特征值$\lambda_1=6$，$\lambda_2=3$，$\lambda_3=3$，与特征值$\lambda_1=6$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1=(1, 1, 1)^T$，求 A.

解 设 $A=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_2&x_4&x_5\\x_3&x_5&x_6\end{pmatrix}$.

因为$\lambda_1=6$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1=(1, 1, 1)^T$，所以有

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}，即\begin{cases}x_1+x_2+x_3=6\\x_2+x_4+x_5=6\\x_3+x_5+x_6=6\end{cases}\quad ---①.$$

$\lambda_2=\lambda_3=3$ 是 A 的二重特征值，根据实对称矩阵的性质定理知 $R(A-3E)=1$．利用①可推出

$$A-3E=\begin{pmatrix}x_1-3&x_2&x_3\\x_2&x_4-3&x_5\\x_3&x_5&x_6-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\x_2&x_4-3&x_5\\x_3&x_5&x_6-3\end{pmatrix}.$$

因为 $R(A-3E)=1$，所以 $x_2=x_4-3=x_5$ 且 $x_3=x_5=x_6-3$，解之得

$$\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{x}_3=\boldsymbol{x}_5=1, \boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_4=\boldsymbol{x}_6=4.$$

因此 $$A=\begin{pmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{pmatrix}.$$

21．设 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$, $a_1\neq0$, $A=\boldsymbol{aa}^T$.

(1)证明$\lambda=0$ 是 A 的 $n-1$ 重特征值;

证明 设λ是 A 的任意一个特征值, $\boldsymbol{x}$ 是 A 的对应于λ的特征向量, 则有

$$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x},$$
$$\lambda^2\boldsymbol{x}=A^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{aa}^T\boldsymbol{aa}^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{ax},$$

于是可得$\lambda^2=\lambda\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}$，从而$\lambda=0$ 或$\lambda=\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}$.

设$\lambda_1, \lambda_2, \cdot\cdot\cdot, \lambda_n$ 是 A 的所有特征值，因为 $A=\boldsymbol{aa}^T$的主对角线性上的元素为 $a_1^2, a_2^2, \cdot\cdot\cdot, a_n^2$，所以

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n,$$

这说明在$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$中有且只有一个等于 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}$, 而其余 $n-1$ 个全为 0, 即$\lambda=0$ 是 A 的 $n-1$ 重特征值.

(2)求 A 的非零特征值及 n 个线性无关的特征向量.

解　设$\lambda_1=\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}$, $\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$.

因为 $A\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{a}$, 所以 $\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{a}$ 是对应于$\lambda_1=\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}$ 的特征向量.

对于$\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$, 解方程 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 即 $\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 因为 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, 所以 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}=0$, 即 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0$, 其线性无关解为

$$\boldsymbol{p}_2=(-a_2, a_1, 0, \cdots, 0)^T,$$
$$\boldsymbol{p}_3=(-a_3, 0, a_1, \cdots, 0)^T,$$
$$\cdots,$$
$$\boldsymbol{p}_n=(-a_n, 0, 0, \cdots, a_1)^T.$$

因此 n 个线性无关特征向量构成的矩阵为

$$(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n)=\begin{pmatrix} a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & 0 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}.$$

22. 设$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, 求 A^{100}.

解　由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & 2 \\ 0 & -3-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda-1)(\lambda-5)(\lambda+5),$$

得 A 的特征值为$\lambda_1=1$, $\lambda_2=5$, $\lambda_3=-5$.

对于$\lambda_1=1$, 解方程$(A-E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得特征向量 $\boldsymbol{p}_1=(1, 0, 0)^T$.

对于$\lambda_1=5$, 解方程$(A-5E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得特征向量 $\boldsymbol{p}_2=(2, 1, 2)^T$.

对于$\lambda_1=-5$, 解方程$(A+5E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得特征向量 $\boldsymbol{p}_3=(1, -2, 1)^T$.

令 $P=(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$, 则

$$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(1, 5, -5)=\Lambda,$$
$$A=P\Lambda P^{-1},$$
$$A^{100}=P\Lambda^{100}P^{-1}.$$

因为

$$\Lambda^{100}=\mathrm{diag}(1, 5^{100}, 5^{100}),$$

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-2\\0&2&1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5&0&-5\\0&1&2\\0&-2&1\end{pmatrix},$$

所以

$$A^{100}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-2\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&5^{100}&\\&&5^{100}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&0&-5\\0&1&2\\0&-2&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&5^{100}-1\\0&5^{100}&0\\0&0&5^{100}\end{pmatrix}.$$

23. 在某国, 每年有比例为 p 的农村居民移居城镇, 有比例为 q 的城镇居民移居农村, 假设该国总人口数不变, 且上述人口迁移的规律也不变. 把 n 年后农村人口和城镇人口占总人口的比例依次记为 x_n 和 $y_n(x_n+y_n=1)$.

(1)求关系式$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$中的矩阵 A;

解　由题意知

$$x_{n+1}=x_n+qy_n-px_n=(1-p)x_n+qy_n,$$

$$y_{n+1}=y_n+px_n-qy_n= px_n+(1-q)y_n,$$

可用矩阵表示为

$$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-p&q\\p&1-q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix},$$

因此　$A=\begin{pmatrix}1-p&q\\p&1-q\end{pmatrix}$.

(2)设目前农村人口与城镇人口相等, 即$\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.5\\0.5\end{pmatrix}$, 求$\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$.

解　由$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$可知$\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$. 由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-p-\lambda&q\\p&1-q-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-1+p+q),$$

得 A 的特征值为$\lambda_1=1, \lambda_2=r$，其中 $r=1-p-q$.

对于$\lambda_1=1$，解方程$(A-E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得特征向量 $\boldsymbol{p}_1=(q, p)^T$.

对于$\lambda_1=r$，解方程$(A-rE)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得特征向量 $\boldsymbol{p}_2=(-1, 1)^T$.

令 $P=(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)=\begin{pmatrix} q & -1 \\ p & 1 \end{pmatrix}$，则

$$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(1, r)=\Lambda,$$
$$A=P\Lambda P^{-1},$$
$$A^n=P\Lambda^n P^{-1}.$$

于是
$$A^n=\begin{pmatrix} q & -1 \\ p & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} q & -1 \\ p & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$
$$=\frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & -1 \\ p & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -p & q \end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q+pr^n & q-qr^n \\ p-pr^n & p+qr^n \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=\frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q+pr^n & q-qr^n \\ p-pr^n & p+qr^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{2(p+q)}\begin{pmatrix} 2q+(p-q)r^n \\ 2p+(q-p)r^n \end{pmatrix}.$$

24. (1)设 $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$，求$\varphi(A)=A^{10}-5A^9$；

解　由
$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-5),$$
得 A 的特征值为$\lambda_1=1, \lambda_2=5$.

对于$\lambda_1=1$，解方程$(A-E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得单位特征向量$\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T$.

对于$\lambda_1=5$，解方程$(A-5E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得单位特征向量$\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)^T$.

于是有正交矩阵 $P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，使得 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(1, 5)=\Lambda$，

从而 $A=P\Lambda P^{-1}, A^k=P\Lambda^k P^{-1}$. 因此
$$\varphi(A)=P\varphi(\Lambda)P^{-1}=P(\Lambda^{10}-5\Lambda^9)P^{-1}$$

$$=P[\mathrm{diag}(1,\ 5^{10})-5\mathrm{diag}(1,\ 5^{9})]P^{-1}$$

$$=P\mathrm{diag}(-4,\ 0)P^{-1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ -2 & -2\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

(2)设 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$, 求 $\varphi(A)=A^{10}-6A^{9}+5A^{8}$.

解　求得正交矩阵为

$$P=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2}\\ -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2}\\ 2 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix},$$

使得 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(-1,\ 1,\ 5)=\Lambda,\ A=P\Lambda P^{-1}$. 于是

$$\varphi(A)=P\varphi(\Lambda)P^{-1}=P(\Lambda^{10}-6\Lambda^{9}+5\Lambda^{8})P^{-1}$$

$$=P[\Lambda^{8}(\Lambda-E)(\Lambda-5E)]P^{-1}$$

$$=P\mathrm{diag}(1,\ 1,\ 5^{8})\mathrm{diag}(-2,\ 0,\ 4)\mathrm{diag}(-6,\ -4,\ 0)P^{-1}$$

$$=P\mathrm{diag}(12,\ 0,\ 0)P^{-1}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2}\\ -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2}\\ 2 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12 & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0\\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$=2\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2\\ -2 & -2 & 4\end{pmatrix}.$$

25. 用矩阵记号表示下列二次型:

(1) $f=x^2+4xy+4y^2+2xz+z^2+4yz$;

解　$f=(x,\ y,\ z)\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$.

(2) $f=x^2+y^2-7z^2-2xy-4xz-4yz$;

解　$f=(x,\ y,\ z)\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ -1 & 1 & -2\\ -2 & -2 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$.

(3) $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-2x_1x_2+4x_1x_3-2x_1x_4+6x_2x_3-4x_2x_4$.

解　$f=(x_1, x_2, x_3, x_4)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

26. 写出下列二次型的矩阵:

(1) $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$;

解　二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$.

解　二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

27. 求一个正交变换将下列二次型化成标准形:

(1) $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^3+4x_2x_3$;

解　二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. 由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)(5-\lambda)(1-\lambda),$$

得 A 的特征值为$\lambda_1=2$, $\lambda_2=5$, $\lambda_3=1$.

当$\lambda_1=2$ 时, 解方程$(A-2E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$A-2E=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得特征向量$(1, 0, 0)^T$. 取 $\boldsymbol{p}_1=(1, 0, 0)^T$.

当$\lambda_2=5$ 时, 解方程$(A-5E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$A-5E=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得特征向量$(0, 1, 1)^T$. 取 $\boldsymbol{p}_2=(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$.

当$\lambda_3=1$时，解方程$(A-E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由

$$A-E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得特征向量$(0, -1, 1)^T$. 取$\boldsymbol{p}_3=(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^T$.

于是有正交矩阵$T=(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$和正交变换$\boldsymbol{x}=T\boldsymbol{y}$，使

$$f=2y_1^2+5y_2^2+y_3^2.$$

(2) $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_3x_4$.

解　二次型矩阵为$A=\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\1&1&-1&0\\0&-1&1&1\\-1&0&1&1\end{pmatrix}$. 由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&0&-1\\1&1-\lambda&-1&0\\0&-1&1-\lambda&1\\-1&0&1&1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-3)(\lambda-1)^2,$$

得A的特征值为$\lambda_1=-1$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=\lambda_4=1$.

当$\lambda_1=-1$时，可得单位特征向量$\boldsymbol{p}_1=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^T$.

当$\lambda_2=3$时，可得单位特征向量$\boldsymbol{p}_2=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})^T$.

当$\lambda_3=\lambda_4=1$时，可得线性无关的单位特征向量

$$\boldsymbol{p}_3=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}},0)^T,\quad \boldsymbol{p}_4=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})^T.$$

于是有正交矩阵$T=(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4)$和正交变换$\boldsymbol{x}=T\boldsymbol{y}$，使

$$f=-y_1^2+3y_2^2+y_3^2+y_4^2.$$

28. 求一个正交变换把二次曲面的方程

$$3x^2+5y^2+5z^2+4xy-4xz-10yz=1$$

化成标准方程.

解　二次型的矩阵为$A=\begin{pmatrix}3&2&-2\\2&5&-5\\-2&-5&5\end{pmatrix}$.

由$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda & 2 & -2\\ 2 & 5-\lambda & -5\\ -2 & -5 & 5-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-2)(\lambda-11)$，得 A 的特征值为 $\lambda_1=2$, $\lambda_2=11$, $\lambda_3=0$, .

对于$\lambda_1=2$，解方程$(A-2E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得特征向量$(4, -1, 1)^T$，单位化得 $\boldsymbol{p}_1=(\frac{4}{3\sqrt{2}},-\frac{1}{3\sqrt{2}},\frac{1}{3\sqrt{2}})$.

对于$\lambda_2=11$，解方程$(A-11E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得特征向量$(1, 2, -2)^T$，单位化得 $\boldsymbol{p}_2=(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$.

对于$\lambda_3=0$，解方程 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得特征向量$(0, 1, 1)^T$，单位化得 $\boldsymbol{p}_3=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$.

于是有正交矩阵 $P=(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$，使 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(2, 11, 0)$，从而有正交变换

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} & 0\\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\\ w\end{pmatrix},$$

使原二次方程变为标准方程 $2u^2+11v^2=1$.

29. 明: 二次型 $f=\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x}$ 在$\|\boldsymbol{x}\|=1$ 时的最大值为矩阵 A 的最大特征值.

证明　A 为实对称矩阵，则有一正交矩阵 T，使得

$$TAT^{-1}=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)=\Lambda$$

成立，其中$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的特征值，不妨设λ_1 最大.

作正交变换 $\boldsymbol{y}=T\boldsymbol{x}$，即 $\boldsymbol{x}=T^T\boldsymbol{y}$，注意到 $T^{-1}=T^T$，有

$$f=\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^TTAT^T\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^T\Lambda\boldsymbol{y}=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2.$$

因为 $\boldsymbol{y}=T\boldsymbol{x}$ 正交变换，所以当$\|\boldsymbol{x}\|=1$ 时，有

$$\|\boldsymbol{y}\|=\|\boldsymbol{x}\|=1\text{，即 }y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=1.$$

因此

$$f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2\le\lambda_1,$$

又当 $y_1=1, y_2=y_3=\cdots=y_n=0$ 时 $f=\lambda_1$, 所以 $f_{\max}=\lambda_1$.

30. 用配方法化下列二次形成规范形, 并写出所用变换的矩阵.

(1) $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+3x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$;

解 $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+3x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$

$=(x_1+x_2-2x_3)^2+4x_2x_3+2x_2^2+x_3^2$

$=(x_1+x_2-2x_3)^2-2x_2^2+(2x_2+x_3)^2$.

令 $\begin{cases} y_1=x_1+x_2-2x_3 \\ y_2=\sqrt{2}x_2 \\ y_3=2x_2+x_3 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} x_1=y_1-\dfrac{5}{\sqrt{2}}y_2+2y_3 \\ x_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_2 \\ x_3=-\sqrt{2}y_2+y_3 \end{cases}$,

二次型化为规范形

$$f=y_1^2-y_2^2+y_3^2,$$

所用的变换矩阵为

$$C=\begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{5}{\sqrt{2}} & 2 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+2x_3^2+2x_1x_3+2x_2x_3$;

解 $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+2x_3^2+2x_1x_3+2x_2x_3$

$=(x_1+x_3)^2+x_3^2+2x_2x_3$;

$=(x_1+x_3)^2-x_2^2+(x_2+x_3)^2$.

令 $\begin{cases} y_1=x_1+x_3 \\ y_2=x_2 \\ y_3=x_2+x_3 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} x_1=y_1+y_2-y_3 \\ x_2=y_2 \\ x_3=-y_2+y_3 \end{cases}$,

二次型化为规范形

$$f=y_1^2-y_2^2+y_3^2,$$

所用的变换矩阵为

$$C=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

(3) $f(x_1, x_2, x_3)=2x_1^2+x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3$.

解　$f(x_1, x_2, x_3)=2x_1^2+x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3$.

$$=2(x_1+\frac{1}{2}x_2)^2+\frac{1}{2}x_2^2+4x_3^2-2x_2x_3$$

$$=2(x_1+\frac{1}{2}x_2)^2+\frac{1}{2}(x_2-2x_3)^2+2x_3^2.$$

令
$$\begin{cases}y_1=\sqrt{2}(x_1+\frac{1}{2}x_2)\\ y_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_2-2x_3)\\ y_3=\sqrt{2}x_3\end{cases}，即\begin{cases}x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}y_1-\frac{1}{\sqrt{2}}y_2-\frac{1}{\sqrt{2}}y_3\\ x_2=\sqrt{2}y_2+\frac{2}{\sqrt{2}}y_3\\ x_3=\frac{1}{\sqrt{2}}y_3\end{cases},$$

二次型化为规范形

$$f=y_1^2+y_2^2+y_3^2,$$

所用的变换矩阵为

$$C=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

31. 设

$$f=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2ax_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$$

为正定二次型，求 a.

解　二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1 & a & -1\\ a & 1 & 2\\ -1 & 2 & 5\end{pmatrix}$，其主子式为

$$a_{11}=1,\ \begin{vmatrix}1 & a\\ a & 1\end{vmatrix}=1-a^2,\ \begin{vmatrix}1 & a & -1\\ a & 1 & 2\\ -1 & 2 & 5\end{vmatrix}=-a(5a+4).$$

因为 f 为正主二次型，所以必有 $1-a^2>0$ 且$-a(5a+4)>0$，解之得 $-\frac{4}{5}<a<0$.

32. 判别下列二次型的正定性:

(1) $f=-2x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$;

解　二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -6 & 0\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix}$. 因为

$$a_{11}=-2<0,\ \begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -6\end{vmatrix}=11>0,\ |A|=-38<0,$$

所以 f 为负定.

(2) $f=x_1^2+3x_2^2+9x_3^2+19x_4^2-2x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4-6x_2x_4-12x_3x_4$.

解　二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 0 & -3\\ 2 & 0 & 9 & -6\\ 1 & -3 & -6 & 19\end{pmatrix}$. 因为

$$a_{11}=1>0,\ \begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=4>0,\ \begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 3 & 0\\ 2 & 0 & 9\end{vmatrix}=6>0,\ |A|=24>0,$$

所以 f 为正定.

33. 证明对称阵 A 为正定的充分必要条件是: 存在可逆矩阵 U, 使 $A=U^TU$, 即 A 与单位阵 E 合同.

证明　因为对称阵 A 为正定的, 所以存在正交矩阵 P 使

$$P^TAP=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)=\Lambda,\ 即\ A=P\Lambda P^T,$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 均为正数. 令 $\Lambda_1=\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})$, 则 $\Lambda=\Lambda_1\Lambda_1$, $A=P\Lambda_1\Lambda_1^TP^T$. 再令 $U=\Lambda_1^TP^T$, 则 U 可逆, 且 $A=U^TU$.