第四章　向量组的线性相关性

1. 设 $\boldsymbol{v}_1=(1,\ 1,\ 0)^T$, $\boldsymbol{v}_2=(0,\ 1,\ 1)^T$, $\boldsymbol{v}_3=(3,\ 4,\ 0)^T$, 求 $\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2$ 及 $3\boldsymbol{v}_1+2\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_3$.

解　$\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2=(1, 1, 0)^T-(0, 1, 1)^T$

$=(1-0, 1-1, 0-1)^T$

$=(1, 0, -1)^T$.

$3\boldsymbol{v}_1+2\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_3=3(1, 1, 0)^T+2(0, 1, 1)^T-(3, 4, 0)^T$

$=(3\times1+2\times0-3, 3\times1+2\times1-4, 3\times0+2\times1-0)^T$

$=(0, 1, 2)^T$.

2. 设 $3(\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a})+2(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a})=5(\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a})$, 求 $\boldsymbol{a}$, 其中 $\boldsymbol{a}_1=(2, 5, 1, 3)^T$, $\boldsymbol{a}_2=(10, 1, 5, 10)^T$, $\boldsymbol{a}_3=(4, 1, -1, 1)^T$.

解　由 $3(\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a})+2(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a})=5(\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a})$整理得

$$\boldsymbol{a}=\frac{1}{6}(3\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2-5\boldsymbol{a}_3)$$

$$=\frac{1}{6}[3(2,5,1,3)^T+2(10,1,5,10)^T-5(4,1,-1,1)^T]$$

$$=(1, 2, 3, 4)^T.$$

3. 已知向量组

A: $\boldsymbol{a}_1=(0, 1, 2, 3)^T$, $\boldsymbol{a}_2=(3, 0, 1, 2)^T$, $\boldsymbol{a}_3=(2, 3, 0, 1)^T$;

B: $\boldsymbol{b}_1=(2, 1, 1, 2)^T$, $\boldsymbol{b}_2=(0, -2, 1, 1)^T$, $\boldsymbol{b}_3=(4, 4, 1, 3)^T$,

证明 B 组能由 A 组线性表示, 但 A 组不能由 B 组线性表示.

证明　由

$$(A, B)=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 2 & -8 & -1 & 7 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&3&1&-2&4\\0&1&-6&-1&5&-7\\0&0&20&5&-15&25\\0&0&4&1&-3&5\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&3&1&-2&4\\0&1&-6&-1&5&-7\\0&0&4&1&-3&5\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

知 $R(A)=R(A, B)=3$，所以 B 组能由 A 组线性表示.

由

$$B=\begin{pmatrix}2&0&4\\1&-2&4\\1&1&1\\2&1&3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-2&2\\0&1&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

知 $R(B)=2$. 因为 $R(B)\neq R(B, A)$，所以 A 组不能由 B 组线性表示.

4. 已知向量组

A: $\boldsymbol{a}_1=(0, 1, 1)^T$, $\boldsymbol{a}_2=(1, 1, 0)^T$;

B: $\boldsymbol{b}_1=(-1, 0, 1)^T$, $\boldsymbol{b}_2=(1, 2, 1)^T$, $\boldsymbol{b}_3=(3, 2, -1)^T$,

证明 A 组与 B 组等价.

证明 由

$$(B, A)=\begin{pmatrix}-1&1&3&0&1\\0&2&2&1&1\\1&1&-1&1&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}-1&1&3&0&1\\0&2&2&1&1\\0&2&2&1&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}-1&1&3&0&1\\0&2&2&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

知 $R(B)=R(B, A)=2$. 显然在 A 中有二阶非零子式，故 $R(A)\geq 2$，又 $R(A)\leq R(B, A)=2$，所以 $R(A)=2$，从而 $R(A)=R(B)=R(A, B)$. 因此 A 组与 B 组等价.

5. 已知 $R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)=2$, $R(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)=3$，证明

(1) $\boldsymbol{a}_1$ 能由 $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 线性表示;

(2) $\boldsymbol{a}_4$ 不能由 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 线性表示.

证明 (1)由 $R(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)=3$ 知 $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ 线性无关，故 $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 也线性无关. 又由 $R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)=2$ 知 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 线性相关，故 $\boldsymbol{a}_1$ 能由 $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 线性

表示.

(2)假如 $\boldsymbol{a}_4$ 能由 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ 线性表示, 则因为 $\boldsymbol{a}_1$ 能由 $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ 线性表示, 故 $\boldsymbol{a}_4$ 能由 $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ 线性表示, 从而 $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$ 线性相关, 矛盾. 因此 $\boldsymbol{a}_4$ 不能由 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ 线性表示.

6. 判定下列向量组是线性相关还是线性无关:

(1) $(-1, 3, 1)^T, (2, 1, 0)^T, (1, 4, 1)^T$;

(2) $(2, 3, 0)^T, (-1, 4, 0)^T, (0, 0, 2)^T$.

解 (1)以所给向量为列向量的矩阵记为 A. 因为

$$A=\begin{pmatrix}-1&2&1\\3&1&4\\1&0&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&7&7\\0&2&2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以 $R(A)=2$ 小于向量的个数, 从而所给向量组线性相关.

(2)以所给向量为列向量的矩阵记为 B. 因为

$$|B|=\begin{vmatrix}2&-1&0\\3&4&0\\0&0&2\end{vmatrix}=22\neq 0,$$

所以 $R(B)=3$ 等于向量的个数, 从而所给向量组线性相无关.

7. 问 a 取什么值时下列向量组线性相关?

$$\boldsymbol{a}_1=(a, 1, 1)^T, \boldsymbol{a}_2=(1, a, -1)^T, \boldsymbol{a}_3=(1, -1, a)^T.$$

解 以所给向量为列向量的矩阵记为 A. 由

$$|A|=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&-1\\1&-1&a\end{vmatrix}=a(a-1)(a+1)$$

知, 当 $a=-1$、0、1 时, $R(A)<3$, 此时向量组线性相关.

8. 设 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ 线性无关, $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}$ 线性相关, 求向量 $\boldsymbol{b}$ 用 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ 线性表示的表示式.

解　因为 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}$ 线性相关，故存在不全为零的数λ_1, λ_2使

$$\lambda_1(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b})+\lambda_2(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b})=0,$$

由此得　$\boldsymbol{b}=-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\boldsymbol{a}_1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\boldsymbol{a}_2=-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\boldsymbol{a}_1-(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})\boldsymbol{a}_2,$

设$c=-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$，则

$$\boldsymbol{b}=c\boldsymbol{a}_1-(1+c)\boldsymbol{a}_2,\ c\in\mathbf{R}.$$

9. 设$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$线性相关，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$也线性相关，问$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}_2$是否一定线性相关？试举例说明之.

解　不一定.

例如，当 $\boldsymbol{a}_1=(1, 2)^T, \boldsymbol{a}_2=(2, 4)^T, \boldsymbol{b}_1=(-1, -1)^T, \boldsymbol{b}_2=(0, 0)^T$ 时，有

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1=(1, 2)^T+\boldsymbol{b}_1=(0, 1)^T,\ \boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}_2=(2, 4)^T+(0, 0)^T=(2, 4)^T,$$

而 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}_2$ 的对应分量不成比例，是线性无关的.

10. 举例说明下列各命题是错误的:

(1)若向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 是线性相关的，则 $\boldsymbol{a}_1$ 可由 $\boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 线性表示.

解　设 $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{e}_1=(1, 0, 0, \cdots, 0), \boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}_3=\cdots=\boldsymbol{a}_m=\mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 线性相关，但 $\boldsymbol{a}_1$ 不能由 $\boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 线性表示.

(2)若有不全为 0 的数$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$使

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m+\lambda_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{b}_m=0$$

成立，则 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 线性相关，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m$ 亦线性相关.

解　有不全为零的数$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$使

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m+\lambda_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{b}_m=\mathbf{0},$$

原式可化为

$$\lambda_1(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1)+\cdots+\lambda_m(\boldsymbol{a}_m+\boldsymbol{b}_m)=\boldsymbol{0}.$$

取 $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{e}_1=-\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{e}_2=-\boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{e}_m=-\boldsymbol{b}_m$, 其中 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_m$ 为单位坐标向量, 则上式成立, 而 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 和 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m$ 均线性无关.

(3)若只有当$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$全为 0 时, 等式

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m+\lambda_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{b}_m=0$$

才能成立, 则 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 线性无关, $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m$ 亦线性无关.

解　由于只有当$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$全为 0 时, 等式

$$由\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m+\lambda_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{b}_m=\boldsymbol{0}$$

成立, 所以只有当$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$全为 0 时, 等式

$$\lambda_1(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1)+\lambda_2(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}_2)+\cdots+\lambda_m(\boldsymbol{a}_m+\boldsymbol{b}_m)=\boldsymbol{0}$$

成立. 因此 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m+\boldsymbol{b}_m$ 线性无关.

取 $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}_2=\cdots=\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0}$, 取 $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m$ 为线性无关组, 则它们满足以上条件, 但 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 线性相关.

(4)若 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 线性相关, $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m$ 亦线性相关, 则有不全为 0 的数, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 使

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m=0, \lambda_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{b}_m=0$$

同时成立.

解　$\boldsymbol{a}_1=(1, 0)^T, \boldsymbol{a}_2=(2, 0)^T, \boldsymbol{b}_1=(0, 3)^T, \boldsymbol{b}_2=(0, 4)^T$,

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{0}\Rightarrow\lambda_1=-2\lambda_2,$$

$$\lambda_1\boldsymbol{b}_1+\lambda_2\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{0}\Rightarrow\lambda_1=-(3/4)\lambda_2,$$

$\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=0$, 与题设矛盾.

11. 设 $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{b}_4=\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_1$, 证明向量组 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4$ 线性相关.

证明　由已知条件得

$$\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{b}_3-\boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_4=\boldsymbol{b}_4-\boldsymbol{a}_1,$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_1&=\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{a}_3\\&=\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3-\boldsymbol{a}_4\\&=\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3-\boldsymbol{b}_4+\boldsymbol{a}_1,\end{aligned}$$

从而

$$\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3-\boldsymbol{b}_4=\boldsymbol{0},$$

这说明向量组 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4$ 线性相关.

12. 设 $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_r$, 且向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ 线性无关, 证明向量组 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r$ 线性无关.

证明　已知的 r 个等式可以写成

$$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r)=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r)\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix},$$

上式记为 $B=AK$. 因为$|K|=1\neq 0$, K 可逆, 所以 $R(B)=R(A)=r$, 从而向量组 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r$ 线性无关.

13. 求下列向量组的秩, 并求一个最大无关组:

(1)$\boldsymbol{a}_1=(1, 2, -1, 4)^T$, $\boldsymbol{a}_2=(9, 100, 10, 4)^T$, $\boldsymbol{a}_3=(-2, -4, 2, -8)^T$;

解　由

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)=\begin{pmatrix}1 & 9 & -2\\ 2 & 100 & -4\\ -1 & 10 & 2\\ 4 & 4 & -8\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 9 & -2\\ 0 & 82 & 0\\ 0 & 19 & 0\\ 0 & -32 & 0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 9 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

知 $R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)=2$. 因为向量 $\boldsymbol{a}_1$ 与 $\boldsymbol{a}_2$ 的分量不成比例, 故 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 线性无关, 所以 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 是一个最大无关组.

(2)$\boldsymbol{a}_1^T=(1, 2, 1, 3)$, $\boldsymbol{a}_2^T=(4, -1, -5, -6)$, $\boldsymbol{a}_3^T=(1, -3, -4, -7)$.

解　由

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ 2 & -1 & -3\\ 1 & -5 & -4\\ 3 & -6 & -7\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ 0 & -9 & -5\\ 0 & -9 & -5\\ 0 & -18 & -10\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ 0 & -9 & -5\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

知 $R(\boldsymbol{a}_1^T, \boldsymbol{a}_2^T, \boldsymbol{a}_3^T)=R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)=2$. 因为向量 $\boldsymbol{a}_1^T$ 与 $\boldsymbol{a}_2^T$ 的分量不成比例，故 $\boldsymbol{a}_1^T, \boldsymbol{a}_2^T$ 线性无关，所以 $\boldsymbol{a}_1^T, \boldsymbol{a}_2^T$ 是一个最大无关组.

14. 利用初等行变换求下列矩阵的列向量组的一个最大无关组:

(1)$\begin{pmatrix}25 & 31 & 17 & 43\\ 75 & 94 & 53 & 132\\ 75 & 94 & 54 & 134\\ 25 & 32 & 20 & 48\end{pmatrix}$;

解　因为

$$\begin{pmatrix}25 & 31 & 17 & 43\\ 75 & 94 & 53 & 132\\ 75 & 94 & 54 & 134\\ 25 & 32 & 20 & 48\end{pmatrix}\underset{r_4-r_1}{\overset{\substack{r_2-3r_1\\ r_3-3r_1}}{\sim}}\begin{pmatrix}25 & 31 & 17 & 43\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 3 & 5\\ 0 & 1 & 3 & 5\end{pmatrix}\underset{r_3-r_2}{\overset{r_4-r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}25 & 31 & 17 & 43\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

所以第 1、2、3 列构成一个最大无关组.

(2)$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1\\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3\\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1\end{pmatrix}$.

解　因为

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1\\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3\\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1\end{pmatrix}\underset{r_4-r_1}{\overset{r_3-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1\\ 0 & -2 & -1 & -5 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2\end{pmatrix}\underset{r_3\leftrightarrow r_4}{\overset{r_3+r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1\\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

所以第 1、2、3 列构成一个最大无关组.

15. 设向量组

$$(a, 3, 1)^T, (2, b, 3)^T, (1, 2, 1)^T, (2, 3, 1)^T$$

的秩为 2, 求 a, b.

解　设 $\boldsymbol{a}_1=(a, 3, 1)^T$, $\boldsymbol{a}_2=(2, b, 3)^T$, $\boldsymbol{a}_3=(1, 2, 1)^T$, $\boldsymbol{a}_4=(2, 3, 1)^T$.

因为

$$(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 2 \\ 2 & 3 & 3 & b \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a-1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & b-6 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a-1 & -1 \\ 0 & 0 & 2-a & b-5 \end{pmatrix},$$

而 $R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)=2$, 所以 $a=2$, $b=5$.

16. 设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 是一组 n 维向量, 已知 n 维单位坐标向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 能由它们线性表示, 证明 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性无关.

证法一　记 $A=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$, $E=(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$. 由已知条件知, 存在矩阵 K, 使

$$E=AK.$$

两边取行列式, 得

$$|E|=|A||K|.$$

可见 $|A|\neq 0$, 所以 $R(A)=n$, 从而 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性无关.

证法二　因为 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 能由 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性表示, 所以

$$R(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\leq R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n),$$

而 $R(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)=n$, $R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)\leq n$, 所以 $R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)=n$, 从而 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性无关.

17. 设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 是一组 n 维向量, 证明它们线性无关的充分必要条件是: 任一 n 维向量都可由它们线性表示.

证明　必要性: 设 $\boldsymbol{a}$ 为任一 n 维向量. 因为 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性无关, 而 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}$ 是 $n+1$ 个 n 维向量, 是线性相关的, 所以 $\boldsymbol{a}$ 能由 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性表示, 且表示式是唯一的.

充分性: 已知任一 n 维向量都可由 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性表示, 故单位坐标向量组 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 能由 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性表示, 于是有

$$n=R(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\le R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)\le n,$$

即 $R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)=n$, 所以 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性无关.

18. 设向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 线性相关, 且 $\boldsymbol{a}_1\ne\boldsymbol{0}$, 证明存在某个向量 $\boldsymbol{a}_k$ $(2\le k\le m)$, 使 $\boldsymbol{a}_k$ 能由 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{k-1}$ 线性表示.

证明　因为 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 线性相关, 所以存在不全为零的数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$, 使

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0},$$

而且 $\lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_m$ 不全为零. 这是因为, 如若不然, 则 $\lambda_1\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{0}$, 由 $\boldsymbol{a}_1\ne\boldsymbol{0}$ 知 $\lambda_1=0$, 矛盾. 因此存在 $k(2\le k\le m)$, 使

$$\lambda_k\ne 0,\ \lambda_{k+1}=\lambda_{k+2}=\cdots=\lambda_m=0,$$

于是

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{a}_k=\boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{a}_k=-(1/\lambda_k)(\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_{k-1}\boldsymbol{a}_{k-1}),$$

即 $\boldsymbol{a}_k$ 能由 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{k-1}$ 线性表示.

19. 设向量组 B: $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_r$ 能由向量组 A: $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ 线性表示为 $(\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_r)=(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s)K$, 其中 K 为 $s\times r$ 矩阵, 且 A 组线性无关. 证明

B 组线性无关的充分必要条件是矩阵 K 的秩 $R(K)=r$.

证明 令 $B=(\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_r)$, $A=(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s)$, 则有 $B=AK$.

必要性: 设向量组 B 线性无关.

由向量组 B 线性无关及矩阵秩的性质, 有

$$r=R(B)=R(AK)\le\min\{R(A), R(K)\}\le R(K),$$

及

$$R(K)\le\min\{r, s\}\le r.$$

因此 $R(K)=r$.

充分性: 因为 $R(K)=r$, 所以存在可逆矩阵 C, 使 $KC=\begin{pmatrix} E_r \\ O \end{pmatrix}$ 为 K 的标准形. 于是

$$(\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_r)C=(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s)KC=(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r).$$

因为 C 可逆, 所以 $R(\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_r)=R(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r)=r$, 从而 $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_r$ 线性无关.

20. 设

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_1 = \quad\;\; \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n \\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1 \quad\;\; +\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n \\ \cdots\;\cdots\;\cdots\;\cdots\;\cdots\;\cdots\;\cdots \\ \boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_{n-1} \end{cases},$$

证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 等价.

证明 将已知关系写成

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

将上式记为 $B=AK$. 因为

$$|K|=\begin{vmatrix}0&1&1&\cdots&1\\1&0&1&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&1&\cdots&0\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1)\neq 0,$$

所以 K 可逆, 故有 $A=BK^{-1}$. 由 $B=AK$ 和 $A=BK^{-1}$ 可知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 与向量组$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 可相互线性表示. 因此向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 与向量组$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 等价.

21. 已知 3 阶矩阵 A 与 3 维列向量 $\boldsymbol{x}$ 满足 $A^3\boldsymbol{x}=3A\boldsymbol{x}-A^2\boldsymbol{x}$, 且向量组 $\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}, A^2\boldsymbol{x}$ 线性无关.

(1)记 $P=(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}, A^2\boldsymbol{x})$, 求 3 阶矩阵 B, 使 $AP=PB$;

解　因为

$$\begin{aligned}AP&=A(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}, A^2\boldsymbol{x})\\&=(A\boldsymbol{x}, A^2\boldsymbol{x}, A^3\boldsymbol{x})\\&=(A\boldsymbol{x}, A^2\boldsymbol{x}, 3A\boldsymbol{x}-A^2\boldsymbol{x})\\&=(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}, A^2\boldsymbol{x})\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

所以 $B=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-1\end{pmatrix}$.

(2)求$|A|$.

解　由 $A^3\boldsymbol{x}=3A\boldsymbol{x}-A^2\boldsymbol{x}$, 得 $A(3\boldsymbol{x}-A\boldsymbol{x}-A^2\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$. 因为 $\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}, A^2\boldsymbol{x}$ 线性无关, 故 $3\boldsymbol{x}-A\boldsymbol{x}-A^2\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 即方程 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解, 所以 $R(A)<3$, $|A|=0$.

22. 求下列齐次线性方程组的基础解系:

(1) $\begin{cases}x_1-8x_2+10x_3+2x_4=0\\2x_1+4x_2+5x_3-x_4=0\\3x_1+8x_2+6x_3-2x_4=0\end{cases}$;

解　对系数矩阵进行初等行变换, 有

$$A=\begin{pmatrix}1 & -8 & 10 & 2\\ 2 & 4 & 5 & -1\\ 3 & 8 & 6 & -2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 1 & -3/4 & -1/4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

于是得

$$\begin{cases}x_1=-4x_3\\ x_2=(3/4)x_3+(1/4)x_4\end{cases}.$$

取$(x_3, x_4)^T=(4, 0)^T$，得$(x_1, x_2)^T=(-16, 3)^T$;

取$(x_3, x_4)^T=(0, 4)^T$，得$(x_1, x_2)^T=(0, 1)^T$.

因此方程组的基础解系为

$$\xi_1=(-16, 3, 4, 0)^T, \xi_2=(0, 1, 0, 4)^T.$$

(2)$\begin{cases}2x_1-3x_2-2x_3+x_4=0\\ 3x_1+5x_2+4x_3-2x_4=0\\ 8x_1+7x_2+6x_3-3x_4=0\end{cases}.$

解　对系数矩阵进行初等行变换，有

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & -2 & 1\\ 3 & 5 & 4 & -2\\ 8 & 7 & 6 & -3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2/19 & -1/19\\ 0 & 1 & 14/19 & -7/19\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

于是得

$$\begin{cases}x_1=-(2/19)x_3+(1/19)x_4\\ x_2=-(14/19)x_3+(7/19)x_4\end{cases}.$$

取$(x_3, x_4)^T=(19, 0)^T$，得$(x_1, x_2)^T=(-2, 14)^T$;

取$(x_3, x_4)^T=(0, 19)^T$，得$(x_1, x_2)^T=(1, 7)^T$.

因此方程组的基础解系为

$$\xi_1=(-2, 14, 19, 0)^T, \xi_2=(1, 7, 0, 19)^T.$$

(3)$nx_1+(n-1)x_2+\cdots+2x_{n-1}+x_n=0$.

解　原方程组即为

$$x_n=-nx_1-(n-1)x_2-\cdots-2x_{n-1}.$$

取 $x_1=1, x_2=x_3=\cdots=x_{n-1}=0$，得 $x_n=-n$;

取 $x_2=1, x_1=x_3=x_4=\cdots=x_{n-1}=0$，得 $x_n=-(n-1)=-n+1$;

$\cdots$;

取 $x_{n-1}=1, x_1=x_2=\cdots=x_{n-2}=0$，得 $x_n=-2$.

因此方程组的基础解系为

$\xi_1=(1, 0, 0, \cdots, 0, -n)^T$,

$\xi_2=(0, 1, 0, \cdots, 0, -n+1)^T$,

$\cdots$,

$\xi_{n-1}=(0, 0, 0, \cdots, 1, -2)^T$.

23. 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 9 & -5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$，求一个 4×2 矩阵 B，使 $AB=\mathbf{0}$，且 $R(B)=2$.

解　显然 B 的两个列向量应是方程组 $AB=\mathbf{0}$ 的两个线性无关的解. 因为

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 9 & -5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & -5/8 & -11/8 \end{pmatrix},$$

所以与方程组 $AB=\mathbf{0}$ 同解方程组为

$$\begin{cases} x_1=(1/8)x_3-(1/8)x_4 \\ x_2=(5/8)x_3+(11/8)x_4 \end{cases}.$$

取 $(x_3, x_4)^T=(8, 0)^T$，得 $(x_1, x_2)^T=(1, 5)^T$;

取 $(x_3, x_4)^T=(0, 8)^T$，得 $(x_1, x_2)^T=(-1, 11)^T$.

方程组 $AB=\mathbf{0}$ 的基础解系为

$\xi_1=(1, 5, 8, 0)^T, \xi_2=(-1, 11, 0, 8)^T$.

因此所求矩阵为 $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 11 \\ 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$.

24. 求一个齐次线性方程组, 使它的基础解系为

$$\xi_1=(0, 1, 2, 3)^T, \xi_2=(3, 2, 1, 0)^T.$$

解　显然原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}，即\begin{cases} x_1=3k_2 \\ x_2=k_1+2k_2 \\ x_3=2k_1+k_2 \\ x_4=3k_1 \end{cases}, (k_1, k_2\in\mathbf{R}),$$

消去 k_1, k_2 得

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_4=0 \\ x_1-3x_3+2x_4=0 \end{cases},$$

此即所求的齐次线性方程组.

25. 设四元齐次线性方程组

$$\text{I: } \begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_2-x_4=0 \end{cases}, \text{II: } \begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ x_2-x_3+x_4=0 \end{cases}.$$

求: (1)方程 I 与 II 的基础解系; (2) I 与 II 的公共解.

解　(1)由方程 I 得$\begin{cases} x_1=-x_4 \\ x_2=x_4 \end{cases}$.

取$(x_3, x_4)^T=(1, 0)^T$, 得$(x_1, x_2)^T=(0, 0)^T$;

取$(x_3, x_4)^T=(0, 1)^T$, 得$(x_1, x_2)^T=(-1, 1)^T$.

因此方程 I 的基础解系为

$$\xi_1=(0, 0, 1, 0)^T, \xi_2=(-1, 1, 0, 1)^T.$$

由方程 II 得$\begin{cases} x_1=-x_4 \\ x_2=x_3-x_4 \end{cases}$.

取$(x_3, x_4)^T=(1, 0)^T$, 得$(x_1, x_2)^T=(0, 1)^T$;

取$(x_3, x_4)^T=(0, 1)^T$, 得$(x_1, x_2)^T=(-1, -1)^T$.

因此方程 II 的基础解系为

$$\xi_1=(0, 1, 1, 0)^T, \xi_2=(-1, -1, 0, 1)^T.$$

(2) I 与 II 的公共解就是方程

$$\text{III:}\quad \begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_2-x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3=0 \\ x_2-x_3+x_4=0 \end{cases}$$

的解. 因为方程组 III 的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以与方程组 III 同解的方程组为

$$\begin{cases} x_1=-x_4 \\ x_2=x_4 \\ x_3=2x_4 \end{cases}.$$

取 $x_4=1$, 得$(x_1, x_2, x_3)^T=(-1, 1, 2)^T$, 方程组 III 的基础解系为

$$\xi=(-1, 1, 2, 1)^T.$$

因此 I 与 II 的公共解为 $\boldsymbol{x}=c(-1, 1, 2, 1)^T, c\in\mathbf{R}$.

26. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2=A$, E 为 n 阶单位矩阵, 证明

$$R(A)+R(A-E)=n.$$

证明　因为 $A(A-E)=A^2-A=A-A=\mathbf{0}$, 所以 $R(A)+R(A-E)\le n$.

又 $R(A-E)=R(E-A)$, 可知

$$R(A)+R(A-E)=R(A)+R(E-A)\ge R(A+E-A)=R(E)=n,$$

由此 $R(A)+R(A-E)=n$.

27. 设 A 为 n 阶矩阵($n\ge 2$), A^*为 A 的伴随阵, 证明

$$R(A^*)=\begin{cases} n & 当R(A)=n \\ 1 & 当R(A)=n-1 \\ 0 & 当R(A)\le n-2 \end{cases}.$$

证明　当 $R(A)=n$ 时, $|A|\neq 0$, 故有

$$|AA^*|=||A|E|=|A|\neq 0,\ |A^*|\neq 0,$$

所以 $R(A^*)=n$.

当 $R(A)=n-1$ 时, $|A|=0$, 故有

$$AA^*=|A|E=\mathbf{0},$$

即 A^*的列向量都是方程组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解. 因为 $R(A)=n-1$, 所以方程组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系中只含一个解向量, 即基础解系的秩为 1. 因此 $R(A^*)=1$.

当 $R(A)\le n-2$ 时, A 中每个元素的代数余子式都为 0, 故 $A^*=O$, 从而 $R(A^*)=0$.

28. 求下列非齐次方程组的一个解及对应的齐次线性方程组的基础解系:

(1) $\begin{cases} x_1+x_2=5 \\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4=1 \\ 5x_1+3x_2+2x_3+2x_4=3 \end{cases}$;

解　对增广矩阵进行初等行变换, 有

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

与所给方程组同解的方程为

$$\begin{cases} x_1=-x_3-8 \\ x_2=\ \ x_3+13 \\ x_4=\qquad 2 \end{cases}.$$

当 $x_3=0$ 时, 得所给方程组的一个解 $\boldsymbol{\eta}=(-8, 13, 0, 2)^{\mathrm{T}}$.

与对应的齐次方程组同解的方程为

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = \ \ x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}.$$

当 $x_3=1$ 时, 得对应的齐次方程组的基础解系 $\boldsymbol{\xi}=(-1, 1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$.

(2) $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 11 \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = -6 \end{cases}$.

解　对增广矩阵进行初等行变换, 有

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 5 & 3 & 6 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & -6 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9/7 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1 & -1/7 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

与所给方程组同解的方程为

$$\begin{cases} x_1 = -(9/7)x_3 + (1/2)x_4 + 1 \\ x_2 = (1/7)x_3 - (1/2)x_4 - 2 \end{cases}.$$

当 $x_3=x_4=0$ 时, 得所给方程组的一个解

$$\boldsymbol{\eta}=(1, -2, 0, 0)^{\mathrm{T}}.$$

与对应的齐次方程组同解的方程为

$$\begin{cases} x_1 = -(9/7)x_3 + (1/2)x_4 \\ x_2 = (1/7)x_3 - (1/2)x_4 \end{cases}.$$

分别取 $(x_3, x_4)^T=(1, 0)^T, (0, 1)^T$, 得对应的齐次方程组的基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1=(-9, 1, 7, 0)^T.\ \boldsymbol{\xi}_2=(1, -1, 0, 2)^T.$$

29. 设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3, 已知 $\boldsymbol{\eta}_1$, $\boldsymbol{\eta}_2$, $\boldsymbol{\eta}_3$ 是它的三个解向量. 且

$$\boldsymbol{\eta}_1=(2, 3, 4, 5)^T,\ \boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=(1, 2, 3, 4)^T,$$

求该方程组的通解.

解　由于方程组中未知数的个数是 4, 系数矩阵的秩为 3, 所以对应的齐次线性方程组的基础解系含有一个向量, 且由于$\boldsymbol{\eta}_1$, $\boldsymbol{\eta}_2$, $\boldsymbol{\eta}_3$均为方程组的解, 由非齐次线性方程组解的结构性质得

$$2\boldsymbol{\eta}_1-(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3)=(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)+(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_3)=(3, 4, 5, 6)^T$$

为其基础解系向量, 故此方程组的通解:

$$\boldsymbol{x}=k(3, 4, 5, 6)^T+(2, 3, 4, 5)^T, (k\in\mathbf{R}).$$

30. 设有向量组 A: $\boldsymbol{a}_1=(\alpha, 2, 10)^T$, $\boldsymbol{a}_2=(-2, 1, 5)^T$, $\boldsymbol{a}_3=(-1, 1, 4)^T$, 及 $\boldsymbol{b}=(1, \beta, -1)^T$, 问$\alpha$, β为何值时

(1)向量 $\boldsymbol{b}$ 不能由向量组 A 线性表示;

(2)向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 A 线性表示, 且表示式唯一;

(3)向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 A 线性表示, 且表示式不唯一, 并求一般表示式.

解　$$(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}-1 & -2 & \alpha & 1\\ 1 & 1 & 2 & \beta\\ 4 & 5 & 10 & -1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}-1 & -2 & \alpha & 1\\ 0 & -1 & 1+\alpha & \beta+1\\ 0 & 0 & 4+\alpha & -3\beta\end{pmatrix}.$$

(1)当$\alpha=-4$, $\beta\neq0$ 时, $R(A)\neq R(A, \boldsymbol{b})$, 此时向量 $\boldsymbol{b}$ 不能由向量组 A 线性表示.

(2)当$\alpha\neq-4$ 时, $R(A)=R(A, \boldsymbol{b})=3$, 此时向量组 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ 线性无关, 而向量组 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{b}$ 线性相关, 故向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 A 线性表示, 且表示式唯一.

(3)当$\alpha=-4$, $\beta=0$ 时, $R(A)=R(A, \boldsymbol{b})=2$, 此时向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 A 线性表示, 且表示式不唯一.

当$\alpha=-4$, $\beta=0$ 时,

$$(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -4 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 0\\ 4 & 5 & 10 & -1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

方程组$(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c+1 \\ -3c-1 \\ c \end{pmatrix}, c \in \mathbf{R}.$$

因此　　$\boldsymbol{b}=(2c+1)\boldsymbol{a}_3+(-3c-1)\boldsymbol{a}_2+c\boldsymbol{a}_1$,

即　　$\boldsymbol{b}= c\boldsymbol{a}_1+(-3c-1)\boldsymbol{a}_2+(2c+1)\boldsymbol{a}_3, c\in\mathbf{R}$.

31. 设 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)^T$, $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)^T$, $\boldsymbol{c}=(c_1, c_2, c_3)^T$, 证明三直线

$$l_1: a_1x+b_1y+c_1=0,$$
$$l_2: a_2x+b_2y+c_2=0, (a_i^2+b_i^2\neq 0, i=1, 2, 3)$$
$$l_3: a_3x+b_3y+c_3=0,$$

相交于一点的充分必要条件为: 向量组 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 线性无关, 且向量组 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 线性相关.

证明　三直线相交于一点的充分必要条件为方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \\ a_3x+b_3y+c_3=0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} a_1x+b_1y=-c_1 \\ a_2x+b_2y=-c_2 \\ a_3x+b_3y=-c_3 \end{cases}$$

有唯一解. 上述方程组可写为 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}$. 因此三直线相交于一点的充分必要条件为 $\boldsymbol{c}$ 能由 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 唯一线性表示, 而 $\boldsymbol{c}$ 能由 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 唯一线性表示的充分必要条件为向量组 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 线性无关, 且向量组 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 线性相关.

32. 设矩阵 $A=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)$, 其中 $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ 线性无关, $\boldsymbol{a}_1=2\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3$. 向量 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4$, 求方程 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

解　由 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4$ 知 $\boldsymbol{\eta}=(1, 1, 1, 1)^T$ 是方程 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的一个解.

由 $\boldsymbol{a}_1=2\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3$ 得 $\boldsymbol{a}_1-2\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}$, 知 $\boldsymbol{\xi}=(1, -2, 1, 0)^T$ 是 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个解.

由 $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ 线性无关知 $R(A)=3$, 故方程 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 所对应的齐次方程

$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系中含一个解向量. 因此$\xi=(1, -2, 1, 0)^T$是方程 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系.

方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=c(1, -2, 1, 0)^T+(1, 1, 1, 1)^T, c\in\mathbf{R}.$$

33. 设$\boldsymbol{\eta}^*$是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解, $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$,是对应的齐次线性方程组的一个基础解系, 证明:

(1)$\boldsymbol{\eta}^*, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$线性无关;

(2)$\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\eta}^*+\xi_1, \boldsymbol{\eta}^*+\xi_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}^*+\xi_{n-r}$线性无关.

证明 (1)反证法, 假设$\boldsymbol{\eta}^*, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$线性相关. 因为$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$线性无关, 而$\boldsymbol{\eta}^*, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$线性相关, 所以$\boldsymbol{\eta}^*$可由$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 线性表示, 且表示式是唯一的, 这说明$\boldsymbol{\eta}^*$也是齐次线性方程组的解, 矛盾.

(2)显然向量组$\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\eta}^*+\xi_1, \boldsymbol{\eta}^*+\xi_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}^*+\xi_{n-r}$与向量组$\boldsymbol{\eta}^*, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$可以相互表示, 故这两个向量组等价, 而由(1)知向量组$\boldsymbol{\eta}^*, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$线性无关, 所以向量组$\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\eta}^*+\xi_1, \boldsymbol{\eta}^*+\xi_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}^*+\xi_{n-r}$也线性无关.

34. 设$\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_s$是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 s 个解, $k_1, k_2, \cdots, k_s$为实数, 满足 $k_1+k_2+\cdots+k_s=1$. 证明

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s$$

也是它的解.

证明 因为$\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_s$都是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解, 所以

$$A\boldsymbol{\eta}_i=\boldsymbol{b}\ (i=1, 2, \cdots, s),$$

从而 $$A(k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s)=k_1A\boldsymbol{\eta}_1+k_2A\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_sA\boldsymbol{\eta}_s$$

$$=(k_1+k_2+\cdots+k_s)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}.$$

因此 $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s$ 也是方程的解.

35. 设非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵的秩为 r, $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$ 是它的 $n-r+1$ 个线性无关的解. 试证它的任一解可表示为

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}, \text{(其中 } k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=1).$$

证明　因为 $\boldsymbol{\eta}_1$, $\boldsymbol{\eta}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$ 均为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解, 所以 $\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}=\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1$ 均为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解.

用反证法证: $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关.

设它们线性相关, 则存在不全为零的数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n-r}$, 使得

$$\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1+\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+\lambda_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}=\boldsymbol{0},$$

即

$$\lambda_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)+\lambda_2(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)+\cdots+\lambda_{n-r}(\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1)=\boldsymbol{0},$$

亦即

$$-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-r})\boldsymbol{\eta}_1+\lambda_1\boldsymbol{\eta}_2+\lambda_2\boldsymbol{\eta}_3+\cdots+\lambda_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}=\boldsymbol{0},$$

由 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$ 线性无关知

$$-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-r})=\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-r}=0,$$

矛盾. 因此 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关. $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个基础解系.

设 $\boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的任意解, 则 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\eta}_1$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解, 故 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\eta}_1$ 可由 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性表出, 设

$$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\eta}_1=k_2\boldsymbol{\xi}_1+k_3\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r+1}\boldsymbol{\xi}_{n-r}$$

$$=k_2(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)+k_3(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)+\cdots+k_{n-r+1}(\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1),$$

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}_1(1-k_2-k_3\cdots-k_{n-r+1})+k_2\boldsymbol{\eta}_2+k_3\boldsymbol{\eta}_3+\cdots+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}.$$

令 $k_1=1-k_2-k_3\cdots-k_{n-r+1}$, 则 $k_1+k_2+k_3\cdots-k_{n-r+1}=1$, 于是

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}.$$

36. 设

$$V_1=\{\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \mid x_1, \cdots, x_n\in\mathbf{R} \text{ 满足 } x_1+x_2+\cdots+x_n=0\},$$

$V_2=\{\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \mid x_1, \cdots, x_n \in \mathbf{R}$ 满足 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1\}$,

问 V_1, V_2 是不是向量空间？为什么？

解　V_1 是向量空间, 因为任取

$$\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)^T \in V_1, \boldsymbol{\beta}=(b_1, b_2, \cdots, b_n)^T \in V_1, \lambda\in \in \mathbf{R},$$

有　$a_1+a_2+\cdots+a_n=0$,

$b_1+b_2+\cdots+b_n=0$,

从而　$(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)$

$=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)=0$,

$\lambda a_1+\lambda a_2+\cdots+\lambda a_n=\lambda(a_1+a_2+\cdots+a_n)=0$,

所以　$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n)^T \in V_1$,

$\lambda\boldsymbol{\alpha}=(\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n)^T \in V_1$.

V_2 不是向量空间, 因为任取

$$\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)^T \in V_1, \boldsymbol{\beta}=(b_1, b_2, \cdots, b_n)^T \in V_1,$$

有　$a_1+a_2+\cdots+a_n=1$,

$b_1+b_2+\cdots+b_n=1$,

从而　$(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)$

$=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)=2$,

所以　$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n)^T \notin V_1$.

37. 试证: 由 $\boldsymbol{a}_1=(0, 1, 1)^T$, $\boldsymbol{a}_2=(1, 0, 1)^T$, $\boldsymbol{a}_3=(1, 1, 0)^T$ 所生成的向量空间就是 $\mathbf{R}^3$.

证明　设 $A=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$, 由

$$|A|=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=-2\neq 0,$$

知 $R(A)=3$, 故 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 线性无关, 所以 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 是三维空间 $\mathbf{R}^3$ 的一

组基，因此由 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 所生成的向量空间就是 $\mathbf{R}^3$.

38. 由 $\boldsymbol{a}_1=(1, 1, 0, 0)^T$, $\boldsymbol{a}_2=(1, 0, 1, 1)^T$ 所生成的向量空间记作 V_1，由 $\boldsymbol{b}_1=(2, -1, 3, 3)^T$, $\boldsymbol{b}_2=(0, 1, -1, -1)^T$ 所生成的向量空间记作 V_2，试证 $V_1=V_2$.

证明　设 $A=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$, $B=(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$. 显然 $R(A)=R(B)=2$，又由

$$(A, B)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

知 $R(A, B)=2$，所以 $R(A)=R(B)=R(A, B)$，从而向量组 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$ 与向量组 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ 等价. 因为向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 与向量组 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ 等价，所以这两个向量组所生成的向量空间相同，即 $V_1=V_2$.

39. 验证 $\boldsymbol{a}_1=(1, -1, 0)^T$, $\boldsymbol{a}_2=(2, 1, 3)^T$, $\boldsymbol{a}_3=(3, 1, 2)^T$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基，并把 $\boldsymbol{v}_1=(5, 0, 7)^T$, $\boldsymbol{v}_2=(-9, -8, -13)^T$ 用这个基线性表示.

解　设 $A=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$. 由

$$|(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}=-6\neq 0,$$

知 $R(A)=3$，故 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 线性无关，所以 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基.

设 $x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+x_3\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{v}_1$，则

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=5 \\ -x_1+x_2+x_3=0 \\ 3x_2+2x_3=7 \end{cases},$$

解之得 $x_1=2, x_2=3, x_3=-1$，故线性表示为 $\boldsymbol{v}_1=2\boldsymbol{a}_1+3\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3$.

设 $x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+x_3\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{v}_2$，则

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=-9 \\ -x_1+x_2+x_3=-8 \\ 3x_2+2x_3=-13 \end{cases},$$

解之得 $x_1=3, x_2=-3, x_3=-2$，故线性表示为 $\boldsymbol{v}_2=3\boldsymbol{a}_1-3\boldsymbol{a}_2-2\boldsymbol{a}_3$.

40. 已知 $\mathbf{R}^3$ 的两个基为

$\boldsymbol{a}_1=(1, 1, 1)^T, \boldsymbol{a}_2=(1, 0, -1)^T, \boldsymbol{a}_3=(1, 0, 1)^T$,

$\boldsymbol{b}_1=(1, 2, 1)^T, \boldsymbol{b}_2=(2, 3, 4)^T, \boldsymbol{b}_3=(3, 4, 3)^T$.

求由基 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 到基 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ 的过渡矩阵 P.

解　设 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 是三维单位坐标向量组，则

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)=(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1},$$

于是 $$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)=(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

由基 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 到基 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ 的过渡矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$