第三章　矩阵的初等变换与线性方程组

1. 把下列矩阵化为行最简形矩阵:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$;

解 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$(下一步: $r_2+(-2)r_1$, $r_3+(-3)r_1$.)

$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$(下一步: $r_2\div(-1)$, $r_3\div(-2)$.)

$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$(下一步: r_3-r_2.)

$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$(下一步: $r_3\div 3$.)

$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$(下一步: r_2+3r_3.)

$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$(下一步: $r_1+(-2)r_2$, r_1+r_3.)

$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & -1 \end{pmatrix}$;

解 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & -1 \end{pmatrix}$(下一步: $r_2\times 2+(-3)r_1$, $r_3+(-2)r_1$.)

$\sim\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$(下一步: r_3+r_2, r_1+3r_2.)

$\sim\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$(下一步: $r_1\div 2$.)

$\sim\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(3)$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$;

解 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$(下一步: r_2-3r_1, r_3-2r_1, r_4-3r_1.)

$\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & -5 & 10 & -10 \end{pmatrix}$(下一步: $r_2\div(-4)$, $r_3\div(-3)$, $r_4\div(-5)$.)

$\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$(下一步: r_1-3r_2, r_3-r_2, r_4-r_2.)

$\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

解 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$(下一步: r_1-2r_2, r_3-3r_2, r_4-2r_2.)

$\sim\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -8 & 8 & 9 & 12 \\ 0 & -7 & 7 & 8 & 11 \end{pmatrix}$(下一步: r_2+2r_1, r_3-8r_1, r_4-7r_1.)

$\sim\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$(下一步: $r_1\leftrightarrow r_2$, $r_2\times(-1)$, r_4-r_3.)

$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$(下一步: r_2+r_3.)

$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. 设 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, 求 A.

解 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$是初等矩阵 $E(1, 2)$, 其逆矩阵就是其本身.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$是初等矩阵 $E(1, 2(1))$, 其逆矩阵是

$$E(1,2(-1))=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4&5&6\\1&2&3\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&5&2\\1&2&2\\7&8&2\end{pmatrix}.$$

3. 试利用矩阵的初等变换，求下列方阵的逆矩阵:

(1) $\begin{pmatrix}3&2&1\\3&1&5\\3&2&3\end{pmatrix}$;

解 $\begin{pmatrix}3&2&1&1&0&0\\3&1&5&0&1&0\\3&2&3&0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3&2&1&1&0&0\\0&-1&4&-1&1&0\\0&0&2&-1&0&1\end{pmatrix}$

$$\sim\begin{pmatrix}3&2&0&3/2&0&-1/2\\0&-1&0&1&1&-2\\0&0&2&-1&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3&0&0&7/2&2&-9/2\\0&-1&0&1&1&-2\\0&0&1&-1/2&0&1/2\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&7/6&2/3&-3/2\\0&1&0&-1&-1&2\\0&0&1&-1/2&0&1/2\end{pmatrix}$$

故逆矩阵为 $\begin{pmatrix}\frac{7}{6}&\frac{2}{3}&-\frac{3}{2}\\-1&-1&2\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix}3&-2&0&-1\\0&2&2&1\\1&-2&-3&-2\\0&1&2&1\end{pmatrix}$.

解 $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 9 & 5 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1` & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}$$

故逆矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}$.

4. (1)设 $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, 求 X 使 $AX=B$;

解 因为

$$(A, B)=\begin{pmatrix}4 & 1 & -2 & 1 & -3\\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2\\ 3 & 1 & -1 & 3 & -1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 10 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -15 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 12 & 4\end{pmatrix},$$

所以 $\qquad X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}10 & 2\\ -15 & -3\\ 12 & 4\end{pmatrix}.$

(2)设 $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ -3 & 3 & -4\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}$，求 X 使 $XA=B$.

解　考虑 $A^TX^T=B^T$. 因为

$$(A^T, B^T)=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 3 & 2 & -3\\ 1 & 3 & -4 & 3 & 1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2 & -4\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 7\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4\end{pmatrix},$$

所以 $\qquad X^T=(A^T)^{-1}B^T=\begin{pmatrix}2 & -4\\ -1 & 7\\ -1 & 4\end{pmatrix},$

从而 $\qquad X=BA^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -4 & 7 & 4\end{pmatrix}.$

5. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $AX=2X+A$，求 X.

解　原方程化为$(A-2E)X=A$. 因为

$$(A-2E, A)=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix},$$

所以 $\qquad X=(A-2E)^{-1}A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}.$

6. 在秩是 r 的矩阵中,有没有等于 0 的 $r-1$ 阶子式? 有没有等于 0 的 r 阶子式?

解　在秩是 r 的矩阵中, 可能存在等于 0 的 $r-1$ 阶子式, 也可能存在等于 0 的 r 阶子式.

例如, $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $R(A)=3$.

$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$是等于 0 的 2 阶子式, $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$是等于 0 的 3 阶子式.

7. 从矩阵 A 中划去一行得到矩阵 B, 问 A, B 的秩的关系怎样?

解　$R(A)\geq R(B)$.

这是因为 B 的非零子式必是 A 的非零子式, 故 A 的秩不会小于 B 的秩.

8. 求作一个秩是 4 的方阵, 它的两个行向量是

$$(1, 0, 1, 0, 0), (1, -1, 0, 0, 0).$$

解　用已知向量容易构成一个有 4 个非零行的 5 阶下三角矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

此矩阵的秩为 4, 其第 2 行和第 3 行是已知向量.

9. 求下列矩阵的秩, 并求一个最高阶非零子式:

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$;

解 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$(下一步: $r_1 \leftrightarrow r_2$.)

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$(下一步: r_2-3r_1, r_3-r_1.)

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \end{pmatrix}$(下一步: r_3-r_2.)

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

矩阵的秩为2, $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$ 是一个最高阶非零子式.

(2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & 5 & -1 & -8 \end{pmatrix}$;

解 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & 5 & -1 & -8 \end{pmatrix}$(下一步: r_1-r_2, r_2-2r_1, r_3-7r_1.)

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -4 & 1 \\ 0 & -7 & 11 & 9 & -5 \\ 0 & -21 & 33 & 27 & -15 \end{pmatrix}$(下一步: r_3-3r_2.)

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -4 & 1 \\ 0 & -7 & 11 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

矩阵的秩是 2, $\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} \end{vmatrix} = \mathbf{-7}$ 是一个最高阶非零子式.

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5 \\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

解 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5 \\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$(下一步: r_1-2r_4, r_2-2r_4, r_3-3r_4.)

$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -3 & -6 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$(下一步: r_2+3r_1, r_3+2r_1.)

$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$(下一步: $r_2\div 16r_4$, r_3-16r_2.)

$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

矩阵的秩为 3, $\begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 \\ 5 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 70 \neq 0$ 是一个最高阶非零子式.

10. 设 A、B 都是 $m\times n$ 矩阵, 证明 $A\sim B$ 的充分必要条件是 $R(A)=R(B)$.

证明　根据定理 3, 必要性是成立的.

充分性. 设 $R(A)=R(B)$, 则 A 与 B 的标准形是相同的. 设 A 与 B 的标准形为 D, 则有

$$A\sim D,\ D\sim B.$$

由等价关系的传递性，有 $A\sim B$.

11. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3k \\ -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \end{pmatrix}$，问 k 为何值，可使

(1)$R(A)=1$; (2)$R(A)=2$; (3)$R(A)=3$.

解 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3k \\ -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 0 & k-1 & k-1 \\ 0 & 0 & -(k-1)(k+2) \end{pmatrix}$.

(1)当 $k=1$ 时, $R(A)=1$;

(2)当 $k=-2$ 且 $k\neq 1$ 时, $R(A)=2$;

(3)当 $k\neq 1$ 且 $k\neq -2$ 时, $R(A)=3$.

12. 求解下列齐次线性方程组:

(1)$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4=0 \\ 2x_1+x_2+x_3-x_4=0 \\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_4=0 \end{cases}$;

解 对系数矩阵 A 进行初等行变换，有

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4/3 \end{pmatrix},$$

于是 $\begin{cases} x_1=\dfrac{4}{3}x_4 \\ x_2=-3x_4 \\ x_3=\dfrac{4}{3}x_4 \\ x_4=x_4 \end{cases}$,

故方程组的解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -3 \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$ (k 为任意常数).

(2) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4=0 \\ 3x_1+6x_2-x_3-3x_4=0 \\ 5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0 \end{cases}$;

解　对系数矩阵 A 进行初等行变换，有

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -3 \\ 5 & 10 & 1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

于是 $\begin{cases} x_1=-2x_2+x_4 \\ x_2=x_2 \\ x_3=0 \\ x_4=x_4 \end{cases}$,

故方程组的解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ (k_1, k_2 为任意常数).

(3) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+5x_4=0 \\ 3x_1+x_2+2x_3-7x_4=0 \\ 4x_1+x_2-3x_3+6x_4=0 \\ x_1-2x_2+4x_3-7x_4=0 \end{cases}$;

解　对系数矩阵 A 进行初等行变换，有

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & -7 \\ 4 & 1 & -3 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

于是 $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$，

故方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}.$$

(4) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0 \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$.

解　对系数矩阵 A 进行初等行变换，有

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & -2 \\ 4 & 11 & -13 & 16 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{17} & \frac{13}{17} \\ 0 & 1 & -\frac{19}{17} & \frac{20}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

于是 $\begin{cases} x_1 = \frac{3}{17}x_3 - \frac{13}{17}x_4 \\ x_2 = \frac{19}{17}x_3 - \frac{20}{17}x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$,

故方程组的解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} \frac{3}{17} \\ \frac{19}{17} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -\frac{13}{17} \\ -\frac{20}{17} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (k_1, k_2 \text{ 为任意常数}).$$

13. 求解下列非齐次线性方程组:

(1) $\begin{cases}4x_1+2x_2-x_3=2\\3x_1-1x_2+2x_3=10\\11x_1+3x_2=8\end{cases}$;

解　对增广矩阵 B 进行初等行变换, 有

$$B=\begin{pmatrix}4&2&-1&2\\3&-1&2&10\\11&3&0&8\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&-3&-8\\0&-10&11&34\\0&0&0&-6\end{pmatrix},$$

于是 $R(A)=2$, 而 $R(B)=3$, 故方程组无解.

(2) $\begin{cases}2x+3y+z=4\\x-2y+4z=-5\\3x+8y-2z=13\\4x-y+9z=-6\end{cases}$;

解　对增广矩阵 B 进行初等行变换, 有

$$B=\begin{pmatrix}2&3&1&4\\1&-2&4&-5\\3&8&-2&13\\4&-1&9&-6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

于是　$\begin{cases}x=-2z-1\\y=z+2\\z=z\end{cases}$,

即　$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ (k 为任意常数).

(3) $\begin{cases}2x+y-z+w=1\\4x+2y-2z+w=2\\2x+y-z-w=1\end{cases}$;

解　对增广矩阵 B 进行初等行变换, 有

$$B=\begin{pmatrix}2&1&-1&1&1\\4&2&-2&1&2\\2&1&-1&-1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1/2&-1/2&0&1/2\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

于是
$$\begin{cases}x=-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}\\y=y\\z=z\\w=0\end{cases},$$

即
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\\0\end{pmatrix}(k_1, k_2\text{ 为任意常数}).$$

(4) $\begin{cases}2x+y-z+w=1\\3x-2y+z-3w=4\\x+4y-3z+5w=-2\end{cases}$.

解　对增广矩阵 B 进行初等行变换，有

$$B=\begin{pmatrix}2&1&-1&1&1\\3&-2&1&-3&4\\1&4&-3&5&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1/7&-1/7&6/7\\0&1&-5/7&9/7&-5/7\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

于是
$$\begin{cases}x=\frac{1}{7}z+\frac{1}{7}w+\frac{6}{7}\\y=\frac{5}{7}z-\frac{9}{7}w-\frac{5}{7}\\z=z\\w=w\end{cases},$$

即
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}\frac{1}{7}\\\frac{5}{7}\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}\frac{1}{7}\\-\frac{9}{7}\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{6}{7}\\-\frac{5}{7}\\0\\0\end{pmatrix}(k_1, k_2\text{ 为任意常数}).$$

14. 写出一个以

$$\boldsymbol{x}=c_1\begin{pmatrix}2\\-3\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-2\\4\\0\\1\end{pmatrix}$$

为通解的齐次线性方程组.

解　根据已知, 可得

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}2\\-3\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-2\\4\\0\\1\end{pmatrix},$$

与此等价地可以写成

$$\begin{cases}x_1=2c_1-c_2\\x_2=-3c_1+4c_2\\x_3=c_1\\x_4=c_2\end{cases},$$

或 $$\begin{cases}x_1=2x_3-x_4\\x_2=-3x_3+4x_4\end{cases},$$

或 $$\begin{cases}x_1-2x_3+x_4=0\\x_2+3x_3-4x_4=0\end{cases},$$

这就是一个满足题目要求的齐次线性方程组.

15. λ取何值时, 非齐次线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1\\x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda\\x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}.$$

(1)有唯一解; (2)无解; (3)有无穷多个解?

解　$$B=\begin{pmatrix}\lambda&1&1&1\\1&\lambda&1&\lambda\\1&1&\lambda&\lambda^2\end{pmatrix}$$

$$\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda)\\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & (1-\lambda)(\lambda+1)^2\end{pmatrix}.$$

(1)要使方程组有唯一解, 必须 $R(A)=3$. 因此当$\lambda\neq1$ 且$\lambda\neq-2$ 时方程组有唯一解.

(2)要使方程组无解, 必须 $R(A)<R(B)$, 故

$$(1-\lambda)(2+\lambda)=0,\ (1-\lambda)(\lambda+1)^2\neq0.$$

因此$\lambda=-2$ 时, 方程组无解.

(3)要使方程组有有无穷多个解, 必须 $R(A)=R(B)<3$, 故

$$(1-\lambda)(2+\lambda)=0,\ (1-\lambda)(\lambda+1)^2=0.$$

因此当$\lambda=1$ 时, 方程组有无穷多个解.

16. 非齐次线性方程组

$$\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=-2\\ x_1-2x_2+x_3=\lambda\\ x_1+x_2-2x_3=\lambda^2\end{cases}$$

当λ取何值时有解? 并求出它的解.

解 $$B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & -2 & \lambda^2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & \lambda\\ 0 & 1 & -1 & -\frac{2}{3}(\lambda-1)\\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda+2)\end{pmatrix}.$$

要使方程组有解, 必须$(1-\lambda)(\lambda+2)=0$, 即$\lambda=1$, $\lambda=-2$.

当$\lambda=1$ 时,

$$B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

方程组解为

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + 1 \\ x_2 = x_3 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x_1 = x_3 + 1 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases},$$

即 $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (k \text{ 为任意常数}).$$

当$\lambda=-2$时,

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

方程组解为

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + 2 \\ x_2 = x_3 + 2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x_1 = x_3 + 2 \\ x_2 = x_3 + 2 \\ x_3 = x_3 \end{cases},$$

即 $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} (k \text{ 为任意常数}).$$

17. 设$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + (5-\lambda)x_2 - 4x_3 = 2 \\ -2x_1 - 4x_2 + (5-\lambda)x_3 = -\lambda - 1 \end{cases}$.

问λ为何值时, 此方程组有唯一解、无解或有无穷多解? 并在有无穷多解时求解.

解 $$B = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 5-\lambda & -4 & 2 \\ -2 & -4 & 5-\lambda & -\lambda-1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 5-\lambda & -4 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(10-\lambda) & (1-\lambda)(4-\lambda) \end{pmatrix}.$$

要使方程组有唯一解，必须 $R(A)=R(B)=3$，即必须

$$(1-\lambda)(10-\lambda)\neq 0,$$

所以当$\lambda\neq 1$ 且$\lambda\neq 10$ 时，方程组有唯一解.

要使方程组无解，必须 $R(A)<R(B)$，即必须

$$(1-\lambda)(10-\lambda)=0 \text{ 且}(1-\lambda)(4-\lambda)\neq 0,$$

所以当$\lambda=10$ 时，方程组无解.

要使方程组有无穷多解，必须 $R(A)=R(B)<3$，即必须

$$(1-\lambda)(10-\lambda)=0 \text{ 且}(1-\lambda)(4-\lambda)=0,$$

所以当$\lambda=1$ 时，方程组有无穷多解.此时，增广矩阵为

$$B\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

方程组的解为

$$\begin{cases}x_1=-x_2+x_3+1\\ x_2=\ x_2\\ x_3=\qquad x_3\end{cases},$$

或 $$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\ (k_1, k_2 \text{ 为任意常数}).$$

18. 证明 $R(A)=1$ 的充分必要条件是存在非零列向量 $\boldsymbol{a}$ 及非零行向量 $\boldsymbol{b}^T$，使 $A=\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^T$.

证明　必要性. 由 $R(A)=1$ 知 A 的标准形为

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \cdots\\ 0\end{pmatrix}(1, 0, \cdots, 0),$$

即存在可逆矩阵 P 和 Q，使

$$PAQ=\begin{pmatrix}1\\0\\\cdots\\0\end{pmatrix}(1, 0, \cdots, 0)\text{，或 }A=P^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\\cdots\\0\end{pmatrix}(1, 0, \cdots, 0)Q^{-1}.$$

令 $\boldsymbol{a}=P^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\\cdots\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}^T=(1,\ 0,\ \cdots,\ 0)Q^{-1}$, 则 $\boldsymbol{a}$ 是非零列向量, $\boldsymbol{b}^T$ 是非零行向量, 且 $A=\boldsymbol{ab}^T$.

充分性. 因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}^T$ 是都是非零向量, 所以 A 是非零矩阵, 从而 $R(A)\geq 1$.

因为

$$1\leq R(A)=R(\boldsymbol{ab}^T)\leq \min\{R(\boldsymbol{a}), R(\boldsymbol{b}^T)\}=\min\{1, 1\}=1,$$

所以 $R(A)=1$.

19. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵, 证明

(1)方程 $AX=E_m$ 有解的充分必要条件是 $R(A)=m$;

证明　由定理 7, 方程 $AX=E_m$ 有解的充分必要条件是

$$R(A)=R(A, E_m),$$

而$|E_m|$是矩阵(A, E_m)的最高阶非零子式, 故 $R(A)=R(A, E_m)=m$. 因此, 方程 $AX=E_m$ 有解的充分必要条件是 $R(A)=m$.

(2)方程 $YA=E_n$ 有解的充分必要条件是 $R(A)=n$.

证明　注意, 方程 $YA=E_n$ 有解的充分必要条件是 $A^TY^T=E_n$ 有解. 由(1) $A^TY^T=E_n$ 有解的充分必要条件是 $R(A^T)=n$. 因此，方程 $YA=E_n$ 有解的充分必要条件是 $R(A)=R(A^T)=n$.

20. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵, 证明: 若 $AX=AY$, 且 $R(A)=n$, 则 $X=Y$.

证明　由 $AX=AY$, 得 $A(X-Y)=O$. 因为 $R(A)=n$, 由定理 9, 方程 $A(X-Y)=O$ 只有零解, 即 $X-Y=O$, 也就是 $X=Y$.