第二章　矩阵及其运算

1. 已知线性变换:

$$\begin{cases} x_1=2y_1+2y_2+y_3 \\ x_2=3y_1+y_2+5y_3 \\ x_3=3y_1+2y_2+3y_3 \end{cases},$$

求从变量 x_1, x_2, x_3 到变量 y_1, y_2, y_3 的线性变换.

解　由已知:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

故

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 & -4 & 9 \\ 6 & 3 & -7 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} y_1=-7x_1-4x_2+9x_3 \\ y_2=6x_1+3x_2-7x_3 \\ y_3=3x_1+2x_2-4x_3 \end{cases}.$$

2. 已知两个线性变换

$$\begin{cases} x_1=2y_1+y_3 \\ x_2=-2y_1+3y_2+2y_3 \\ x_3=4y_1+y_2+5y_3 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1=-3z_1+z_2 \\ y_2=2z_1+z_3 \\ y_3=-z_2+3z_3 \end{cases},$$

求从 z_1, z_2, z_3 到 x_1, x_2, x_3 的线性变换.

解　由已知

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 12 & -4 & 9 \\ -10 & -1 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix},$$

所以有$\begin{cases} x_1 = -6z_1 + z_2 + 3z_3 \\ x_2 = 12z_1 - 4z_2 + 9z_3 \\ x_3 = -10z_1 - z_2 + 16z_3 \end{cases}$.

3. 设$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $3AB-2A$ 及 A^TB.

解 $$3AB-2A=3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=3\begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 13 & 22 \\ -2 & -17 & 20 \\ 4 & 29 & -2 \end{pmatrix},$$

$$A^TB=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. 计算下列乘积:

(1) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

解 $$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4\times7+3\times2+1\times1 \\ 1\times7+(-2)\times2+3\times1 \\ 5\times7+7\times2+0\times1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 35 \\ 6 \\ 49 \end{pmatrix}.$$

(2) $(1\ \ 2\ \ 3)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

解 $$(1\ \ 2\ \ 3)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=(1\times3+2\times2+3\times1)=(10).$$

(3) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}(-1\ \ 2)$;

解 $\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}(-1\ \ 2)=\begin{pmatrix}2\times(-1) & 2\times2\\1\times(-1) & 1\times2\\3\times(-1) & 3\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\-1 & 2\\-3 & 6\end{pmatrix}$.

(4) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 4 & 0\\1 & -1 & 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\0 & -1 & 2\\1 & -3 & 1\\4 & 0 & -2\end{pmatrix}$;

解 $\begin{pmatrix}2 & 1 & 4 & 0\\1 & -1 & 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\0 & -1 & 2\\1 & -3 & 1\\4 & 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -7 & 8\\20 & -5 & -6\end{pmatrix}$.

(5) $(x_1\ \ x_2\ \ x_3)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{12} & a_{22} & a_{23}\\a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$;

解

$$(x_1\ \ x_2\ \ x_3)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{12} & a_{22} & a_{23}\\a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\quad a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\quad a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3.$$

5. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 2\end{pmatrix}$，问:

(1) $AB=BA$ 吗?

解 $AB\neq BA$.

因为 $AB=\begin{pmatrix}3 & 4\\4 & 6\end{pmatrix}$，$BA=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 8\end{pmatrix}$， 所以 $AB\neq BA$.

(2) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 吗?

解　$(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$.

因为 $A+B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$,

$$(A+B)^2=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 14 \\ 14 & 29 \end{pmatrix},$$

但
$$A^2+2AB+B^2=\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 16 \\ 15 & 27 \end{pmatrix},$$

所以 $(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$.

(3) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ 吗?

解　$(A+B)(A-B) \neq A^2-B^2$.

因为 $A+B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $A-B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$(A+B)(A-B)=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix},$$

而
$$A^2-B^2=\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 7 \end{pmatrix},$$

故 $(A+B)(A-B) \neq A^2-B^2$.

6. 举反列说明下列命题是错误的:

(1)若 $A^2=0$, 则 $A=0$;

解　取 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A^2=0$, 但 $A\neq 0$.

(2)若 $A^2=A$, 则 $A=0$ 或 $A=E$;

解　取 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A^2=A$, 但 $A\neq 0$ 且 $A\neq E$.

(3)若 $AX=AY$, 且 $A\neq 0$, 则 $X=Y$.

解　取

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},$$

则 $AX=AY$, 且 $A\neq 0$, 但 $X\neq Y$.

7. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}$, 求 $A^2, A^3, \cdots, A^k$.

解 $A^2=\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2\lambda&1\end{pmatrix}$,

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&0\\2\lambda&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\3\lambda&1\end{pmatrix},$$

$\cdots\cdots,$

$$A^k=\begin{pmatrix}1&0\\k\lambda&1\end{pmatrix}.$$

8. 设 $A=\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$, 求 A^k.

解 首先观察

$$A^2=\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2&2\lambda&1\\0&\lambda^2&2\lambda\\0&0&\lambda^2\end{pmatrix},$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}\lambda^3&3\lambda^2&3\lambda\\0&\lambda^3&3\lambda^2\\0&0&\lambda^3\end{pmatrix},$$

$$A^4=A^3\cdot A=\begin{pmatrix}\lambda^4&4\lambda^3&6\lambda^2\\0&\lambda^4&4\lambda^3\\0&0&\lambda^4\end{pmatrix},$$

$$A^5=A^4\cdot A=\begin{pmatrix}\lambda^5&5\lambda^4&10\lambda^3\\0&\lambda^5&5\lambda^4\\0&0&\lambda^5\end{pmatrix},$$

$\cdots\cdots,$

$$A^k=\begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix}.$$

用数学归纳法证明:

当 k=2 时, 显然成立.

假设 k 时成立，则 k+1 时，

$$A^{k+1}=A^k\cdot A=\begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^{k-1} & \frac{(k+1)k}{2}\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^{k+1} \end{pmatrix},$$

由数学归纳法原理知:

$$A^k=\begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix}.$$

9. 设 A, B 为 n 阶矩阵，且 A 为对称矩阵，证明 B^TAB 也是对称矩阵.

证明　因为 $A^T=A$, 所以

$$(B^TAB)^T=B^T(B^TA)^T=B^TA^TB=B^TAB,$$

从而 B^TAB 是对称矩阵.

10. 设 A, B 都是 n 阶对称矩阵，证明 AB 是对称矩阵的充分必要条件是 $AB=BA$.

证明　充分性: 因为 $A^T=A, B^T=B$, 且 $AB=BA$, 所以

$$(AB)^T=(BA)^T=A^TB^T=AB,$$

即 AB 是对称矩阵.

必要性: 因为 $A^T=A, B^T=B$, 且$(AB)^T=AB$, 所以

$$AB=(AB)^T=B^TA^T=BA.$$

11. 求下列矩阵的逆矩阵:

(1)$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$;

解　$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. $|A|=1$, 故 A^{-1} 存在. 因为

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

故　$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2)$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$;

解　$A=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. $|A|=1\neq 0$, 故 A^{-1} 存在. 因为

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

所以　$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

(3)$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$;

解　$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. $|A|=2\neq 0$, 故 A^{-1} 存在. 因为

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -13 & 6 & -1 \\ -32 & 14 & -2 \end{pmatrix},$$

所以 $$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -\frac{13}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ -16 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

(4) $\begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}$ $(a_1a_2\cdots a_n\neq 0)$.

解 $A=\begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}$, 由对角矩阵的性质知

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}.$$

12. 解下列矩阵方程:

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

解 $$X=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

(2) $X\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

解　$X=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}^{-1}$

$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -2 & 3 & -2\\ -3 & 3 & 0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ -\frac{8}{3} & 5 & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}.$

(3) $\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$;

解　$X=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}^{-1}$

$=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}2 & -4\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}6 & 6\\ 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \frac{1}{4} & 0\end{pmatrix}.$

(4) $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -4 & 3\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}.$

解　$X=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & -4 & 3\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}$

$=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -4 & 3\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 3 & -4\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}.$

13. 利用逆矩阵解下列线性方程组:

(1) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1 \\ 2x_1+2x_2+5x_3=2 \\ 3x_1+5x_2+x_3=3 \end{cases}$;

解　方程组可表示为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

故　$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

从而有　$\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=0 \\ x_3=0 \end{cases}$.

(2) $\begin{cases} x_1-x_2-x_3=2 \\ 2x_1-x_2-3x_3=1 \\ 3x_1+2x_2-5x_3=0 \end{cases}$.

解　方程组可表示为

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

故　$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

故有　$\begin{cases} x_1=5 \\ x_2=0 \\ x_3=3 \end{cases}$.

14. 设 $A^k=O$ (k 为正整数), 证明 $(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$.

证明　因为 $A^k=O$, 所以 $E-A^k=E$. 又因为

$$E-A^k=(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}),$$

所以 $(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})=E$,

由定理 2 推论知$(E-A)$可逆, 且

$$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}.$$

证明 一方面, 有 $E=(E-A)^{-1}(E-A)$.

另一方面, 由 $A^k=O$, 有

$$E=(E-A)+(A-A^2)+A^2-\cdots-A^{k-1}+(A^{k-1}-A^k)$$
$$=(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})(E-A),$$

故 $(E-A)^{-1}(E-A)=(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})(E-A)$,

两端同时右乘$(E-A)^{-1}$, 就有

$$(E-A)^{-1}(E-A)=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}.$$

15. 设方阵 A 满足 $A^2-A-2E=O$, 证明 A 及 $A+2E$ 都可逆, 并求 A^{-1} 及$(A+2E)^{-1}$.

证明 由 $A^2-A-2E=O$ 得

$$A^2-A=2E,\text{ 即 } A(A-E)=2E,$$

或 $A\cdot\frac{1}{2}(A-E)=E$,

由定理 2 推论知 A 可逆, 且 $A^{-1}=\frac{1}{2}(A-E)$.

由 $A^2-A-2E=O$ 得

$$A^2-A-6E=-4E,\text{ 即}(A+2E)(A-3E)=-4E,$$

或 $(A+2E)\cdot\frac{1}{4}(3E-A)=E$

由定理 2 推论知$(A+2E)$可逆, 且$(A+2E)^{-1}=\frac{1}{4}(3E-A)$.

证明 由 $A^2-A-2E=O$ 得 $A^2-A=2E$, 两端同时取行列式得

$$|A^2-A|=2,$$

即 $$|A||A-E|=2,$$

故 $$|A|\neq 0,$$

所以 A 可逆，而 $A+2E=A^2$, $|A+2E|=|A^2|=|A|^2\neq 0$，故 $A+2E$ 也可逆.

由 $$A^2-A-2E=O\Rightarrow A(A-E)=2E$$

$$\Rightarrow A^{-1}A(A-E)=2A^{-1}E\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}(A-E),$$

又由 $$A^2-A-2E=O\Rightarrow (A+2E)A-3(A+2E)=-4E$$

$$\Rightarrow (A+2E)(A-3E)=-4E,$$

所以 $$(A+2E)^{-1}(A+2E)(A-3E)=-4(A+2E)^{-1},$$

$$(A+2E)^{-1}=\frac{1}{4}(3E-A).$$

16. 设 A 为 3 阶矩阵，$|A|=\frac{1}{2}$，求 $|(2A)^{-1}-5A^*|$.

解　因为 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$，所以

$$|(2A)^{-1}-5A^*|=|\frac{1}{2}A^{-1}-5|A|A^{-1}|=|\frac{1}{2}A^{-1}-\frac{5}{2}A^{-1}|$$

$$=|-2A^{-1}|=(-2)^3|A^{-1}|=-8|A|^{-1}=-8\times 2=-16.$$

17. 设矩阵 A 可逆，证明其伴随阵 A^* 也可逆，且 $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$.

证明　由 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$，得 $A^*=|A|A^{-1}$，所以当 A 可逆时，有

$$|A^*|=|A|^n|A^{-1}|=|A|^{n-1}\neq 0,$$

从而 A^* 也可逆.

因为 $A^*=|A|A^{-1}$，所以

$$(A^*)^{-1}=|A|^{-1}A.$$

又 $A=\frac{1}{|A^{-1}|}(A^{-1})^*=|A|(A^{-1})^*$，所以

$(A^*)^{-1}=|A|^{-1}A=|A|^{-1}|A|(A^{-1})^*=(A^{-1})^*.$

18. 设 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵为 A^*，证明:

(1)若$|A|=0$，则$|A^*|=0$;

(2)$|A^*|=|A|^{n-1}$.

证明

(1)用反证法证明．假设$|A^*|\neq 0$，则有 $A^*(A^*)^{-1}=E$，由此得

$$A=A\,A^*(A^*)^{-1}=|A|E(A^*)^{-1}=O\,,$$

所以 $A^*=O$，这与$|A^*|\neq 0$ 矛盾，故当$|A|=0$ 时，有$|A^*|=0$.

(2)由于 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$，则 $AA^*=|A|E$，取行列式得到

$$|A||A^*|=|A|^n.$$

若$|A|\neq 0$，则$|A^*|=|A|^{n-1}$;

若$|A|=0$，由(1)知$|A^*|=0$，此时命题也成立.

因此$|A^*|=|A|^{n-1}$.

19. 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $AB=A+2B$，求 B.

解　由 $AB=A+2E$ 可得$(A-2E)B=A$，故

$$B=(A-2E)^{-1}A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

20. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，且 $AB+E=A^2+B$，求 B.

解　由 $AB+E=A^2+B$ 得

$$(A-E)B=A^2-E,$$

即 $$(A-E)B=(A-E)(A+E).$$

因为$|A-E|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0$，所以$(A-E)$可逆，从而

$$B=A+E=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

21．设 $A=\text{diag}(1, -2, 1)$, $A^*BA=2BA-8E$，求 B.

解　由 $A^*BA=2BA-8E$ 得

$$(A^*-2E)BA=-8E,$$

$$B=-8(A^*-2E)^{-1}A^{-1}$$

$$=-8[A(A^*-2E)]^{-1}$$

$$=-8(AA^*-2A)^{-1}$$

$$=-8(|A|E-2A)^{-1}$$

$$=-8(-2E-2A)^{-1}$$

$$=4(E+A)^{-1}$$

$$=4[\text{diag}(2, -1, 2)]^{-1}$$

$$=4\text{diag}(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2})$$

$$=2\text{diag}(1, -2, 1).$$

22．已知矩阵 A 的伴随阵 $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$，

且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$，求 B.

解　由$|A^*|=|A|^3=8$，得$|A|=2$.

由 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$ 得

$$AB=B+3A,$$

$$B=3(A-E)^{-1}A=3[A(E-A^{-1})]^{-1}A$$

$$=3(E-\frac{1}{2}A^*)^{-1}=6(2E-A^*)^{-1}$$

$$=6\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&3&0&-6\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{pmatrix}.$$

23. 设 $P^{-1}AP=\Lambda$, 其中 $P=\begin{pmatrix}-1&-4\\1&1\end{pmatrix}$, $\Lambda=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}$, 求 A^{11}.

解　由 $P^{-1}AP=\Lambda$, 得 $A=P\Lambda P^{-1}$, 所以 $A^{11}=A=P\Lambda^{11}P^{-1}$.

$|P|=3$, $P^*=\begin{pmatrix}1&4\\-1&1\end{pmatrix}$, $P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&4\\-1&-1\end{pmatrix}$,

而 $$\Lambda^{11}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}^{11}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2^{11}\end{pmatrix},$$

故 $$A^{11}=\begin{pmatrix}-1&-4\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&2^{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{4}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2731&2732\\-683&-684\end{pmatrix}.$$

24. 设 $AP=P\Lambda$, 其中 $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&-2\\1&-1&1\end{pmatrix}$, $\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&5\end{pmatrix}$,

求 $\varphi(A)=A^8(5E-6A+A^2)$.

解　$\varphi(\Lambda)=\Lambda^8(5E-6\Lambda+\Lambda^2)$

$=\mathrm{diag}(1,1,5^8)[\mathrm{diag}(5,5,5)-\mathrm{diag}(-6,6,30)+\mathrm{diag}(1,1,25)]$

$=\mathrm{diag}(1,1,5^8)\mathrm{diag}(12,0,0)=12\mathrm{diag}(1,0,0)$.

$\varphi(A)=P\varphi(\Lambda)P^{-1}$

$$=\frac{1}{|P|}P\varphi(\Lambda)P^*$$

$$=-2\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&-2\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-2&-2\\-3&0&3\\-1&2&-1\end{pmatrix}$$

$$=4\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

25. 设矩阵 A、B 及 $A+B$ 都可逆, 证明 $A^{-1}+B^{-1}$ 也可逆, 并求其逆阵.

证明　因为

$$A^{-1}(A+B)B^{-1}=B^{-1}+A^{-1}=A^{-1}+B^{-1},$$

而 $A^{-1}(A+B)B^{-1}$ 是三个可逆矩阵的乘积, 所以 $A^{-1}(A+B)B^{-1}$ 可逆, 即 $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆.

$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=[A^{-1}(A+B)B^{-1}]^{-1}=B(A+B)^{-1}A.$$

26. 计算 $\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&1&0&1\\0&0&2&1\\0&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&3&1\\0&1&2&-1\\0&0&-2&3\\0&0&0&-3\end{pmatrix}$.

解　设 $A_1=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}$, $B_1=\begin{pmatrix}3&1\\2&-1\end{pmatrix}$, $B_2=\begin{pmatrix}-2&3\\0&-3\end{pmatrix}$,

则 $$\begin{pmatrix}A_1&E\\O&A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&B_1\\O&B_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1&A_1B_1+B_2\\O&A_2B_2\end{pmatrix},$$

而 $$A_1B_1+B_2=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\2&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&3\\0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&2\\2&-4\end{pmatrix},$$

$$A_2B_2=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&3\\0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&3\\0&-9\end{pmatrix},$$

所以 $$\begin{pmatrix}A_1&E\\O&A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&B_1\\O&B_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1&A_1B_1+B_2\\O&A_2B_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&5&2\\0&1&2&-4\\0&0&-4&3\\0&0&0&-9\end{pmatrix},$$

即
$$\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&1&0&1\\0&0&2&1\\0&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&3&1\\0&1&2&-1\\0&0&-2&3\\0&0&0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&5&2\\0&1&2&-4\\0&0&-4&3\\0&0&0&-9\end{pmatrix}.$$

27. 取 $A=B=-C=D=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，验证 $\begin{vmatrix}A&B\\C&D\end{vmatrix}\neq\begin{vmatrix}|A|&|B|\\|C|&|D|\end{vmatrix}$.

解
$$\begin{vmatrix}A&B\\C&D\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&0\\0&2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=4,$$

而
$$\begin{vmatrix}|A|&|B|\\|C|&|D|\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0,$$

故
$$\begin{vmatrix}A&B\\C&D\end{vmatrix}\neq\begin{vmatrix}|A|&|B|\\|C|&|D|\end{vmatrix}.$$

28. 设 $A=\begin{pmatrix}3&4&&\\4&-3&&\\&&2&0\\&&2&2\end{pmatrix}$，求 $|A^8|$ 及 A^4.

解　令 $A_1=\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix}2&0\\2&2\end{pmatrix}$，

则
$$A=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix},$$

故
$$A^8=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}^8=\begin{pmatrix}A_1^8&O\\O&A_2^8\end{pmatrix},$$

$$|A^8|=|A_1^8||A_2^8|=|A_1|^8|A_2|^8=10^{16}.$$

$$A^4=\begin{pmatrix}A_1^4&O\\O&A_2^4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5^4&0&&\\0&5^4&&\\&&2^4&0\\&&2^6&2^4\end{pmatrix}.$$

29. 设 n 阶矩阵 A 及 s 阶矩阵 B 都可逆，求

(1) $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}$;

解 设 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AC_3 & AC_4 \\ BC_1 & BC_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_n & O \\ O & E_s \end{pmatrix}.$$

由此得 $\begin{cases} AC_3=E_n \\ AC_4=O \\ BC_1=O \\ BC_2=E_s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_3=A^{-1} \\ C_4=O \\ C_1=O \\ C_2=B^{-1} \end{cases}$,

所以 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1}$.

解 设 $\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AD_1 & AD_2 \\ CD_1+BD_3 & CD_2+BD_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_n & O \\ O & E_s \end{pmatrix}.$$

由此得 $\begin{cases} AD_1=E_n \\ AD_2=O \\ CD_1+BD_3=O \\ CD_2+BD_4=E_s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_1=A^{-1} \\ D_2=O \\ D_3=-B^{-1}CA^{-1} \\ D_4=B^{-1} \end{cases}$,

所以 $\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$.

30. 求下列矩阵的逆阵:

(1) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$;

解　设$A=\begin{pmatrix}5&2\\2&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}8&3\\5&2\end{pmatrix}$，则

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}5&2\\2&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&5\end{pmatrix},\quad B^{-1}=\begin{pmatrix}8&3\\5&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&-3\\-5&8\end{pmatrix}.$$

于是
$$\begin{pmatrix}5&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&8&3\\0&0&5&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A&\\&B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&\\&B^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\-2&5&0&0\\0&0&2&-3\\0&0&-5&8\end{pmatrix}.$$

(2) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\2&1&3&0\\1&2&1&4\end{pmatrix}$.

解　设$A=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}3&0\\1&4\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$，则

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\2&1&3&0\\1&2&1&4\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A&O\\C&B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&O\\-B^{-1}CA^{-1}&B^{-1}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{6}&\frac{1}{3}&0\\\frac{1}{8}&-\frac{5}{24}&-\frac{1}{12}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}.$$