《线性代数》试题(一)答案

一. 单项选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1.C　　2. D　　3. D　　4. A　　5. B

二. 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 45° 或 $\dfrac{\pi}{4}$　　2. 8　　3. 1　　4. $\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$　　5. $\lambda^3+2\lambda-1$

三. 解答题(每小题 8 分，共 48 分)

1. 解： $(A,E)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\underset{r_3-r_1}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ………4 分

$\underset{r_3-3r_2}{\overset{r_2\leftrightarrow r_3}{\sim}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ ………6 分

$\overset{r_1-r_3}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ ………7 分

所以 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$的逆矩阵为$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. ………8 分

2. 解：$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{c_1+c_3}{\overset{c_1+c_2}{=}} \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{r_3-r_1}{\overset{r_2-r_1}{=}} 6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -18.$ ………8 分

3. 解：对方程组的增广矩阵进行初等行变换

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 5 & 5 \end{pmatrix} \underset{r_3-2r_1}{\overset{r_2-r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ………3 分

$$\xrightarrow[r_1-r_2]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&-2&1\\0&1&1&3&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$ ………6 分

所以方程组的解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},(c_1,c_2\in \mathrm{R})$$ ………8 分

4. 解：对矩阵进行初等行变换

$$(a_1,a_2,a_3,a_4)=\begin{pmatrix}1&1&0&2\\1&2&1&4\\1&3&3&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&1&0&2\\0&1&1&2\\0&2&3&1\end{pmatrix}$$ ………3 分

$$\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&1&1\\0&0&1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1-r_3]{r_2-r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&-3\\0&1&0&4\\0&0&1&-2\end{pmatrix}$$ ………6 分

所以 a_1,a_2,a_3 是向量组的极大无关组，且 $a_4=-3a_1+4a_2-2a_3$. ………8 分

5. 解: 令矩阵 $\begin{pmatrix}-2&1\\-4&3\end{pmatrix}=A$, 先求 A 的特征根

$$\det(xI-A)=\begin{vmatrix}x+2&-1\\4&x-3\end{vmatrix}=x^2-x-2=(x+1)(x-2).$$

所以 A 的特征根为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=2.$ ………2 分

当 $\lambda_1=-1$，$\begin{pmatrix}1&-1\\4&-4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$，所以 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 必为其特征向量，

当 $\lambda_1=2$，由 $\begin{pmatrix}4&-1\\4&-1\end{pmatrix}$，所以 $\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ 必为其特征向量， ………4 分

令 $P=\begin{pmatrix}1&1\\1&4\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{4}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ ………5 分

则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-2&1\\-4&3\end{pmatrix}^{10}=P\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}^{10}P^{-1}$, ………7 分

即 $\begin{pmatrix}-2&1\\-4&3\end{pmatrix}^{10}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}4-2^{10}&2^{10}-1\\4-2^{12}&2^{12}-1\end{pmatrix}$. ………8 分

6. 解：令 $b_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, b_2=a_2-\frac{[a_2,b_1]}{[b_1,b_1]}b_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{2}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ………5 分

$$b_3=a_3-\frac{[a_3,b_1]}{[b_1,b_1]}b_1-\frac{[a_3,b_2]}{[b_2,b_2]}b_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}.$$ ………8 分

四、证明题(每小题 6 分，共 12 分)

1．证明：若 λ 是 A 的特征值，α 为属于 λ 的特征向量，则

$\lambda^2-5\lambda+6$ 必为 $A^2-5A+6E$ 的特征值，α 为特征向量，即

$$(A^2-5A+6E)\alpha=(\lambda^2-5\lambda+6)\alpha.$$ ………4 分

但 $A^2-5A+6E=0$, 所以 $(\lambda^2-5\lambda+6)\alpha=0$. 故 $\lambda^2-5\lambda+6=0$.

即 A 的特征值只能取 2 或 3.

2．证明：必要性：因为 $R(A)=1$, 存在可逆矩阵 P,Q，使得

$$PAQ=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\cdots&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, \text{则 } A=P^{-1}\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\cdots&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}Q^{-1}=P^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\end{pmatrix}Q^{-1}.$$

令 $\alpha = P^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\beta^T = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} Q^{-1}$. ·········4 分

充分性：因为 α 与 β^{T} 非零，则 $R(A) \geq 1$.

但 $R(A) \leq R(\alpha\beta^T) \leq \min\{R(\alpha), R(\beta)\} = 1$. ·········6 分