第一章 行列式

第一节 行列式

一．教学重点：对角线法则

二．教学目标：掌握二阶与三阶行列式的定义，计算二阶与三阶行列式

三．教学过程：

1. 引入

行列式的概念起源于解线性方程组，它是从二元与三元线性方程组的解的公式引出来的。因此我们首先讨论解放组的问题。

设有二元线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$

用加减消元法求出未知量 x_1, x_2 的值，当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，有

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

这就是一般二元线性方程组的公式解，但这个公式很不好记忆，应用是不方便，因此，我们引进新的符号来表示这个结果，这就是行列式的起源。

定义 1 我们称 4 个数组成的符号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$为二阶行列式。

说明几个问题：

1) 它含有两行，两列。横的叫行，纵的叫列。行列式中的数叫做行列式的元素。

2) 从上式知，二阶行列式是这样两项的代数和：一个是从左上角到右下角的对角线(又叫行列式的主对角线)上两个元素的乘积，取正号；另一个是从右上角到左下角的对角线(又叫次对角线)上两个元素的乘积，取负号。

2.例题讲解

例 1 求解二元线性方程组 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12, \\ 2x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$

解 由于 $D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0,\quad D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 14,\quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -21,$

因此 $x_1 = \dfrac{D_1}{D} = 2,\quad x_2 = \dfrac{D_2}{D} = -3.$

定义 2 我们称符号
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

为三阶行列式。

说明几个问题

1) 它有三行三列，是六项的代数和。

2) 这六项的和也可用对角线法则来记忆：从左上角到右下角三个元素的乘积取正号，从右上角到左下角三个元素的乘积取负号。

例 2 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & 2 & -4\\ -2 & 2 & 1\\ -3 & 4 & -2\end{vmatrix}.$

解 按对角线法则，有 $D=1\times2\times(-2)+2\times1\times(-3)+(-4)\times(-2)\times4$

$$-1\times1\times4-2\times(-2)\times(-2)-(-4)\times2\times(-3)$$

$$=-4-6+32-4-8-24=-14.$$

例3 求解方程 $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & x\\ 4 & 9 & x^2\end{vmatrix}=0.$

解 方程左端的三阶行列式 $D=3x^2+4x+18-9x-2x^2-12$

$$=x^2-5x+6,$$

由 $x^2-5x+6=0$ 解得 $x=2$ 或 $x=3.$

3. 本节小结：对角线法则，简单线性方程组的求解公式。

4. 作业： 32 页 1.2) 4)

第二节 全排列及其逆序数

一．教学重点：排列，逆序数

二．教学难点：逆序数

三．教学目标：掌握逆序数的定义和求法

四．教学过程：

1. 引例 用 1,2,3 三个数字，可以组成多少个没有重复数字的三位数？

解 这个问题相当于说，把三个数字分别放在百位、十位与个位上，有几种不同的方法？

显然，百位上可以从 1,2,3 三个数字中任选一个，所以有 3 种方法；十位上只能从剩下的两个数字中选一个，所以有 2 种方法；而个位上只能放最后剩下的一个数字，所以有 1 种方法。因此，共有$3\times2\times1=6$种方法。

这六个不同的三位数是：123, 231，312，132, 213，321.

对于n个不同的元素，也可以提出类似的问题：把n个不同的元素排成一列，共有几种不同的排法？

定义 1 把n个不同的元素排成一列，叫做这n个元素的全排列(简称排列)。

对上述问题，我们可以仿照引例进行讨论：

从n个元素中任取一个放在第一个位置上，有n种取法；又从剩下的$n-1$个元素中任

取一个放在第二个位置上，有 $n-1$ 中取法；这样继续下去，总共有 $n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1=n!$

定义 2 在 n 个元素的任意排列中这个排列的逆序数。逆序数为奇数的排列叫做奇排列，逆序数为偶数的排列叫做偶排列。，当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就说有一个逆序。一个排列中所有逆序的总数叫做

2. 逆序数的求法：

不失一般性，不妨设 n 个元素为 1 至 n 这 n 个自然数，并规定由小到大为标准排列。设 $p_1p_2\cdots p_n$ 为这 n 个自然数的一个排列，考虑元素 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$，如果比 p_i 大的且排在 p_i 前面的元素有 t_i 个，就说 p_i 这个元素的逆序数是 t_i。全体元素的逆序数之总和

$$t=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i,$$

即是这个排列的逆序数。

3. 例题讲解

例 4 求排列 32514 的逆序数。

解 在排列 32514 中，3 排在首位，逆序数为 0；2 的前面比 2 大的数有一个 3，故逆序数为 1 ；5 是最大数，逆序数为 0 ；1 的前面比 1 大的数有 3、2、5，故逆序数为 3；4 的前面比 4 大的数有一个 5，故逆序数为 1，于是这个排列的逆序数为 $t=0+1+0+3+1=5.$

4. 本节小结：全排列，逆序数

5. 作业：32 页 2.5）6）

第三节 n 阶行列式的定义

一．教学重点：n 阶行列式的定义，n 阶行列式的求法

二．教学难点：n 阶行列式的求法

三．教学目标：掌握 n 阶行列式的定义求法

四．教学过程：

1. 引入

为了作出 n 阶行列式的定义，先来研究三阶行列式的结构。三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

容易看出：

(i) 上式右边的每一项都恰是三个元素的乘积，这三个元素位于不同的行、不同的列。因此，上式右端的任一项除正负号外可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$. 这里第一个下标(行标)排成标准次序 123，而第二个下标(列表)排成 $p_1p_2p_3$，它是 1,2,3 三个数的某个排列。这样的排列共有

6 种，对应上式右端共含 6 项。

(ii) 各项的正负号与列表的排列对照：

带正号的三项列表排列是：123, 231, 312；

带负号的三项列表排列是：132, 213, 321.

总之，三阶行列式可以写成 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}$，其中 t 为排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数，$\sum$ 表示对 1,2,3 三个数的所有排列 $p_1p_2p_3$.

定义 1 称符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$ 为 n 阶行列式，简记作 $\det(a_{ij})$. 数 a_{ij} 称为行列式 $\det(a_{ij})$ 的元素。

2. 例题讲解

例 5 证明对角行列式(其中对角线上的元素是 λ_i, 未写出的元素都是 0)

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n;$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

证 第一式是显然的，下面只证第二式。

若记 $\lambda_i = a_{i,n-i+1}$，则依行列式定义 $\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1,n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ a_{n,1} & & & \end{vmatrix}$

$$= (-1)^t a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n,1} = (-1)^t \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

其中 t 为排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数，故 $t = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

定义 2 对角线一下(上)的元素为 0 的行列式叫做上(下)三角形行列式，它的值与对角行列一样。

例6 证明下三角形行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$

证 由于当 $j>i$ 时，$a_{ij}=0,$ 故 D 中可能不为 0 的元素为 a_{ip_i}，其下标应有 $p_i\le i$，即 $p_1\le 1, p_2\le 2,\cdots,p_n\le n.$ 在所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，能满足上述关系的排列只有一个自然排列 $12\cdots n$，所以 D 中可能不为 0 的项只有一项 $(-1)^t a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$ 此项的符号 $(-1)^t=(-1)^0=1,$ 所以 $D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$

3. 本节小结： n 阶行列式的定义和求法，对角形行列式

4. 作业：

第四节 对换

一．**教学重点**：对换的定义，奇偶性

二．**教学难点**：对换的奇偶性

三．**教学目标**：掌握对换的定义

四．**教学过程：**

1. 为了研究 n 阶行列式的性质，先来讨论对换以及它与排列的奇偶性的关系。

定义 1 在排列中，将任意两个元素对调，其余的元素不动，这种作出新排列的手续叫做对换。将相邻两个元素对换，叫做相邻对换。

定理 1 一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性。

证 先证相邻对换的情形。

设排列为 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$，对换 a 与 b，变为 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m.$ 显然，$a_1,\cdots,a_l;b_1,\cdots,b_m$ 这些元素的逆序数经过对换并不改变，而 a，b 两元素的逆序数改变为：当 $a<b$ 时，经对换后 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变；当 $a>b$ 时，经对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆序数减少 1. 所以排列 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$ 与排列 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$ 的奇偶性不同。

再证一般对换的情形。

设排列为 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$，把它作 m 次相邻变换，调成 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m c_1\cdots c_n$，再做 $m+1$ 次相邻对换，调成 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$. 总之，经 $2m+1$ 次相邻对换，排列 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$ 调成排列 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$，所以这两个排列的奇偶性相反。

推论 奇排列调成标准排列的对换次数为奇数，偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

证 由定理 1 知对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，而标准排列的对换次数为偶数.

定理 2 n 阶行列式也可以定义为 $D=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$，其中 t 为标准排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数.

证　按行列式定义有 $D=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$,

记 $$D_1=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}.$$

对于 D 中任一项 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$, 总有且仅有 D_1 中的某一项 $(-1)^s a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$ 与之对应并相等；反之，对于 D_1 中的任一项 $(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$，也总有且仅有 D 中的某一项 $(-1)^s a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}$ 与之对应并相等，于是 D 与 D_1 中的项可以一一对应并相等，从而 $D=D_1$.

2. 本节小结：对换 奇偶性

3. 作业：

第五节 行列式的性质

一．**教学重点**：行列式的性质及其计算

二．**教学难点**：行列式的性质

三．**教学目标**：熟练掌握行列式的性质，并会计算行列式

四．**教学过程**：

1. 讲解新课

定义 1　记 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, $D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, 行列式 D^T 称为行列式 D 的转置行列式.

性质 1　行列式与它的转置行列式相等.

证　记 $D=\det(a_{ij})$ 的转置行列式 $D^T=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$, 即

$b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$, 按定义 $D^T=\sum(-1)^t b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}$

$$=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}.$$

而由定理 2，有 $D=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$, 故 $D^T=D.$

性质 2　互换行列式的两行(列)，行列式变号.

证　设行列式 $D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$ 是由行列式 $D=\det(a_{ij})$ 变换 i,j 两行得到的，即当 $k\neq i,j$ 时，$b_{kp}=a_{kp}$；当 $k=i,j$ 时，$b_{ip}=a_{jp},b_{jp}=a_{ip}$，于是

$$
\begin{aligned}
D_1&=\sum(-1)^t b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n}\\
&=\sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n}\\
&=\sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n},
\end{aligned}
$$

其中 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 为自然排列，t 为排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序数. 设排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数为 t_1，则 $(-1)^t=-(-1)^{t_1}$，故

$$D_1=-\sum(-1)^{t_1} a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}=-D.$$

推论　如果行列式有两行(列)完全相同，则此行列式等于零.

证　把这两行互换，有 $D=-D$，故 $D=0$.

性质 3　行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式.

推论　行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

性质 4　行列式中如果有两行(列)元素成比例，则此行列式等于零.

性质 5　若行列式的某一列(行)的元素都是两数之和，例如第 i 列的元素都是两数之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i}+a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i}+a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni}+a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$ 则 D 等于两个行列式之和

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 6　把行列式的某一列(行)的各元素乘以同一个数然后加到另一列(行)对应的元素上去，行列式不变.

2. 例题讲解

例 7　计算 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

解 $D=-\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\1&-5&3&-4\\0&2&1&-1\\-5&1&3&-3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&-8&4&-6\\0&2&1&-1\\0&16&-2&7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&-8&4&-6\\0&16&-2&7\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&0&8&-10\\0&0&-10&15\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&0&8&-10\\0&0&0&\frac{5}{2}\end{vmatrix}=40.$$

例9 计算 $D=\begin{vmatrix}a&b&c&d\\a&a+b&a+b+c&a+b+c+d\\a&2a&3a+2b+c&4a+3b+2c+d\\a&3a+b&6a+3b+c&10a+6b+3c+d\end{vmatrix}$.

例10 设 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1k}&&&\\\vdots&&\vdots&&0&\\a_{k1}&\cdots&a_{kk}&&&\\c_{11}&\cdots&c_{1k}&b_{11}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{n1}&\cdots&c_{nk}&b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix}$

$$D_1=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1k}\\\vdots&&\vdots\\a_{k1}&\cdots&a_{kk}\end{vmatrix},D_2=\det(b_{ij})=\begin{vmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&&\vdots\\b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix},$$

证明 $D=D_1D_2$.

3. 本节小结： 行列式的性质和计算

4. 作业： 33 页 4.3)4) 5.4)5)

第六节 行列式按行(列)展开

一．教学重点：余子式，代数余子式，行列式按行展开

二．教学难点：行列式按行展开

三．教学目标：熟练掌握行列式按行展开的方法，并 会计算行列式

四．教学过程：

1. 讲解新课

定义 1 在n阶行列式中，把元素a_{ij}所在的第i行和第j列划去后，留下来的$n-1$阶行列式叫做元素a_{ij}的余子式，记作M_{ij}；记$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，A_{ij}叫做元素a_{ij}的代数余子式.

引理 一个n阶行列式，如果其中第i行所以元素除a_{ij}外都为零，那么这行列式等于a_{ij}与它的代数余子式的乘积，即 $D = a_{ij}A_{ij}$.

证 先证a_{ij}位于第1行第1列的情形，此时 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

这是例10中当$k = 1$时的特殊情形，按例10的结论，即有 $D = a_{11}M_{11}$.

又
$$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11},$$

从而
$$D = a_{11}A_{11}.$$

再证一般情形，此时 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$. 把$D$的第$i$行依次与第$i-1$行、第$i-2$行、…、第1行对调，这样$a_{ij}$就调到原来$a_{ij}$的位置上，调换的次数为$i-1$. 再把第$j$列依次与第$j-1$列、第$j-2$列、…、第2列对调，这样$a_{ij}$就调到左上角，调换的次数为$j-1$. 总之，经$i+j-2$次调换，把$a_{ij}$调到左上角，所得的行列式

$D_1 = (-1)^{i+j-2}\, D = (-1)^{i+j}D$, 而元素$a_{ij}$在$D_1$中的余子式仍然是$a_{ij}$在$D$中的余子式$M_{ij}$.

由于a_{ij}位于D_1的左上角，利用前面的结果，有 $D_1 = a_{ij}M_{ij}$,

于是
$$D = (-1)^{i+j}D_1 = (-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij} = a_{ij}A_{ij}.$$

定理 3 (行列式按行(列)展开法则) 行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \qquad (i = 1,2,\cdots,n),$$

或
$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \qquad (j = 1,2,\cdots,n).$$

证 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

根据引理，既得 $D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \quad (i=1,2,\cdots,n).$

类似地，若按列证明，可得 $D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \quad (j=1,2,\cdots,n).$

例11 计算 $D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & & b \\ & a & & 0 & & b & \\ & & \ddots & & ⋰ & & \\ & & & a \quad b & & & \\ & 0 & & & & 0 & \\ & & & c \quad d & & & \\ & & ⋰ & & \ddots & & \\ & c & & & & d & \\ c & & & & & & d \end{vmatrix}$

解 按第 1 行展开，有 $D_{2n}=a\cdot\begin{vmatrix} a & & & & & b & 0 \\ & \ddots & & & ⋰ & & \\ & & a & b & & & \\ & 0 & & & & 0 & \\ & & c & d & & & \\ & ⋰ & & & \ddots & & \\ c & & & 0 & & d & 0 \\ 0 & & & & & 0 & d \end{vmatrix}$

$$
+b(-1)^{1+2n}\begin{vmatrix}
0 & a & & 0 & & & b \\
 & & \ddots & & & \iddots & \\
 & & & a & b & & \\
 & 0 & & & & 0 & \\
 & & & c & d & & \\
 & & \iddots & & & \ddots & \\
0 & c & & 0 & & & d \\
c & 0 & & & & & 0
\end{vmatrix}
$$

$$
=adD_{2(n-1)}-bc(-1)^{2n-1+1}D_{2(n-1)}=(ad-bc)D_{2(n-1)},
$$

以此作递推公式，即可得

$$
D_{2n}=(ad-bc)D_{2(n-1)}=(ad-bc)^2D_{2(n-2)}=\cdots
$$

$$
=(ad-bc)^{n-1}D_2=(ad-bc)^{n-1}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=(ad-bc)^n.
$$

例 12 范德蒙德行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod\limits_{n\geq i>j\geq 1}(x_i-x_j)$, (8)

其中记号“Π”表示全体同类因子的乘积.

证 用数学归纳法. 因为 $D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}=x_2-x_1=\prod\limits_{2\geq i>j\geq 1}(x_i-x_j)$, 所以当 $n=2$ 时(8)式成立. 现在假设(8)式对于 $n-1$ 阶范德蒙德行列式成立，要证(8)式对 n 阶范德蒙德行列式也成立. 为此，设法把 D_n 降阶：从第 n 行开始，后行减去前行的 x_1 倍，有

$$
D_n=\begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
0 & x_2-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\
0 & x_2(x_2-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1) \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1)
\end{vmatrix},
$$

按第 1 列展开，并把每列的公因子提出，就有

$$
D_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\
\vdots & \vdots & & \\
x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2}
\end{vmatrix}
$$

上式右端的行列式是 $n-1$ 阶范德蒙德行列式，按归纳法假设，它等于所有 x_i-x_j 因子的乘

积，其中$n \ge i > j \ge 2$. 故 $D_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\prod\limits_{n \ge i > j \ge 2}(x_i - x_j)$

$$= \prod_{n \ge i > j \ge 1}(x_i - x_j).$$

推论　行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零.

即
$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0, i \ne j,$$

或
$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0, i \ne j,$$

证 把行列式$D = \det(a_{ij})$按第j行展开，有

$$a_{j1}A_{j1} + a_{j2}A_{j2} + \cdots + a_{jn}A_{jn} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

在上式中把a_{jk}换成$a_{ik}\ (k = 1, \cdots, n)$, 可得

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ (i\text{行}) \\ \\ (j\text{行}) \\ \\ \\ \end{array}$$

当$i \ne j$时，上式右端行列式中有两行对应元素相同，故行列式等于零，即得

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0, i \ne j,$$

上述证法如按列进行，即可得

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0, i \ne j.$$

综合定理 3 及其推论，有关于代数余子式的重要性质：

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, & \text{当} i = j, \\ 0, & \text{当} i \ne j; \end{cases}$$

或
$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, & \text{当} i = j, \\ 0, & \text{当} i \ne j, \end{cases} \quad \text{其中}\ \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当} i = j, \\ 0, & \text{当} i \ne j. \end{cases}$$

2. 本节小结：掌握行列式按行(列)展开的定义，计算一般的行列

3. 作业： 34 页 73)4)6)

第七节 克拉默法则

一．教学重点：克拉默法则，求解线性方程组

二．教学难点：用克拉默法则求解线性方程组

三．教学目标：熟练掌握克拉默法则，并会计算线性方程组

四．教学过程：

1. 讲解新课

含有n个未知数$x_1,x_2,\cdots,x_n$的n个线性方程的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n, \end{cases} \tag{9}$$

与二、三元线性方程组相类似，它的解可以用当n阶行列式表示，即有

克拉默法则 如果线性方程组(9)的系数行列式不等于零，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

那么，方程组(9)有唯一解 $x_1=\dfrac{D_1}{D},x_2=\dfrac{D_2}{D},\cdots,x_3=\dfrac{D_n}{D},$ (10)

其中$D_j(j=1,2,\cdots,n)$是把系数行列式D中第j列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的n阶行列式， 即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 用D中第j列的元素的代数余子式$A_{1j},A_{2j},\cdots,A_{nj}$依次乘方程组(9)的$n$个方程，再把它们相加，得$(\sum_{k=1}^{n}a_{k1}A_{kj})x_1+\cdots+(\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj})x_j+\cdots+(\sum_{k=1}^{n}a_{kn}A_{kj})x_n=\sum_{k=1}^{n}b_kA_{kj},$

根据代数余子式的重要性质可知，上式中x_j的系数等于D，而其余$x_i(i\neq j)$的系数均为 0；又等式右端为D_j. 于是 $Dx_j=D_j,(j=1,2,\cdots,n).$ (11)

当$D\neq 0$时，方程组(11)有唯一的一个解(10).

由于方程组(11)是由方程组(9)经乘数与相加两种运算而得，故(9)的解一定是(11)的解. 今(11)仅有一个解(10)，故(9)如果有解，就只可能是解(10).

为证解(10)是方程组(9)的唯一解，还需验证(10)确是方程组(9)的解，也就是要证明

$$a_{i1}\frac{D_1}{D}+a_{i2}\frac{D_2}{D}+\cdots+a_{in}\frac{D_n}{D}=b_i,(i=1,2,\cdots,n).$$

为此，考虑有两行相同的$n+1$阶行列式 $\begin{vmatrix} b_i & a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}(i=1,2,\cdots,n),$

它的值为 0. 把它按第 1 行展开，由于第 1 行中a_{ij}的代数余子式为

$$(-1)^{1+i+j}\begin{vmatrix} b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{j+2}(-1)^{j-1}D_j=-D_j,$$

所以有 $0=b_iD-a_{i1}D_1-\cdots-a_{in}D_n$，即

$$a_{i1}\frac{D_1}{D}+a_{i2}\frac{D_2}{D}+\cdots+a_{in}\frac{D_n}{D}=b_i,(i=1,2,\cdots,n).$$

定理 4 如果线性方程组(9)的系数行列式$D\neq 0,$则(9)一定有解，且解唯一.

定理 4′ 如果线性方程组(9)无解或有两个不同的解，则它的系数行列式必为零.

对于齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots a_{nn}x_n=0, \end{cases} \qquad (12)$$

$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$一定是它的解，这个解叫做齐次线性方程组(12)的零解. 如果一组不全为零的数是(12)的解，则它叫做齐次线性方程组(12)的非零解. 齐次线性方程组(12)一定有零解，但不一定有非零解.

定理 5 如果齐次线性方程组(12)的系数行列式$D\neq 0,$则齐次线性方程组(12)没有非零解.

定理 5′ 如果齐次线性方程组(12)有非零解，则它的系数行列式必为零.

2. 例题讲解

例 13 解线性方程组$\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8, \\ x_1-3x_2-6x_4=9, \\ 2x_2-x_3+2x_4=-5, \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0. \end{cases}$

例 14 问λ取何值时，齐次线性方程组 $\begin{cases}(5-\lambda)x+2=y+2z=0,\\ 2x+(6-\lambda)y=0,\\ 2x+(4-\lambda)z=0.\end{cases}$ (13) 有非零解？

解 由定理$5'$可知，若齐次线性方程组(13)有非零解，则(13)的系数行列式$D=0$. 而

$$D=\begin{vmatrix}5-\lambda & 2 & 2\\ 2 & 6-\lambda & 0\\ 2 & 0 & 4-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)(2-\lambda)(8-\lambda),$$

由 $D=0,$ 得 $\lambda=2,\lambda=5,\lambda=8.$

不难验证，当$\lambda=2,\lambda=5,\lambda=8$时，齐次线性方程组(13)确有非零解.

3. 本节小结：克拉默法则线性方程组的系数行列式与解的关系

4. 作业：35 页 8.2）9，10.

第二章 矩阵及其运算

第一节 矩阵

一．**教学重点：**矩阵的概念以及基本组成的含义

二．**教学难点：**矩阵的概念以及基本组成的含义

三．**教学目标：**理解矩阵的概念

四．**教学过程：**

1. 讲解新课

定义 1 由$m\times n$个数$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$排成$m$行$n$列的数表：

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

称为m行n列矩阵，简称$m\times n$矩阵. 这$m\times n$个数称为矩阵的元素，简称为元，数a_{ij}位于矩阵的第i行第j列，称为矩阵的(i,j)元. 矩阵的横向称行，纵向称列. 所有元素都是实数的矩阵称为实矩阵，所有元素都是复数的矩阵称为复矩阵. 课本中的矩阵除特殊说明外，都是实矩阵.

几种特殊矩阵：

(1) 只有一行的矩阵称为行矩阵，又称行向量,

(2) 只有一列的矩阵称为列矩阵，又称列向量，

(3) 所有元素都是零的矩阵称为零矩阵，记作 0，

(4) 当 $m=n$ 时，矩阵称为方阵，

(5) 两个矩阵的行数相等，列数相等时，称它们为同型矩阵。

(6) 上三角矩阵：$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ (主对角线一下均为零)；

(7) 下三角矩阵：$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ (主对角线以上均为零)；

(8) 对角矩阵：$\Lambda=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ (既是上三角又是下三角)，对角矩阵也记作

$\Lambda = diag(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{nn})$.

(9) 单位矩阵：对角元素为 1 的对角矩阵，记作 E, 即 $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

2. 本节小结：矩阵的定义，几种特殊的矩阵

3. 作业：

第二节　矩阵的运算

一．教学重点：矩阵的运算及性质，转置矩阵，共轭矩阵

二．教学难点：矩阵的运算及性质

三．教学目标：掌握矩阵的运算性质

四．教学过程：

1. 讲解新课

定义 2 设有两个 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$, 那么矩阵 A 与 B 的和记作 $A+B$, 规定

为
$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

应该注意，只有当两个矩阵是同型矩阵时，这两个矩阵才能进行加法运算.

矩阵加法满足下列运算规律(设A,B,C都是$m\times n$矩阵)：

(i) $A+B=B+A$;

(ii) $(A+B)+C=A+(B+C)$.

设矩阵 $A=(a_{ij})$, 记 $-A=(-a_{ij})$, $-A$ 称为矩阵 A 的负矩阵, 显然有 $-A+A=O$. 由此规定矩阵的减法为 $A-B=A+(-B)$.

定义 3 数 λ 与矩阵 A 的乘积记作 λA 或 $A\lambda$，规定为

$$\lambda A=A\lambda=\begin{pmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn}\end{pmatrix}.$$

数乘矩阵满足下列运算规律(设A,B为$m\times n$矩阵,λ,μ为数):

(i) $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$;

(ii) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$;

(iii) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.

矩阵相加与数乘矩阵合起来，统称为矩阵的线性运算.

定义 4 设 $A=(a_{ij})$ 是一个 $m\times s$ 矩阵， $B=(b_{ij})$ 是一个 $s\times n$ 矩阵，那么规定矩阵 A 与矩阵 B 的乘积是一个 $m\times n$ 矩阵 $C=(c_{ij})$, 其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),\tag{6}$$

并把此乘积叫作 $C=AB$.

按此定义，一个 $1\times s$ 行矩阵与一个 $s\times 1$ 列矩阵的乘积是一个 1 阶方阵，也就是一个数:

$$\begin{pmatrix}a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{is}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{sj}\end{pmatrix}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}=c_{ij},$$

由此表明乘积矩阵 $AB=C$ 的 (i,j) 元 c_{ij} 就是 A 的第 i 行与 B 的第 j 列的乘积.

必须注意：只有当第一个矩阵(左矩阵)的列数等于第二个矩阵(右矩阵)的行数时，两个矩阵才能相乘.

例 4 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&3&-1\\2&1&0&2\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}4&1&0\\-1&1&3\\2&0&1\\1&3&4\end{pmatrix}$ 的乘积 AB.

例 5 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2&4\\1&-2\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}2&4\\-3&-6\end{pmatrix}$ 的乘积 AB 及 BA.

在例 4 中，A 是 2×4 矩阵，B 是 4×3 矩阵，乘积 AB 有意义而 BA 却没有意义，由此可知，在矩阵的乘法中必须注意矩阵相乘的顺序.

例 5 表明，矩阵 $A\neq O, B\neq O$，但却有 $BA=O$. 这就提醒读者要特别注意：若有两个矩阵 A,B 满足 $AB=O$. 不能得出 $A=O$ 或 $B=O$ 的结论；若 $A\neq O$ 而 $A(X-Y)=O$，也不能得出 $X=Y$ 的结论.

矩阵的乘法虽不满足交换律，但仍满足下列结合律和分配律(假设运算都是可行的)：

(i) $(AB)C=A(BC)$;

(ii) $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$, (其中 λ 为数);

(iii) $A(B+C)=AB+AC, (B+C)A=BA+CA$.

对于单位矩阵 E，容易验证

$$E_m A_{m\times n}=A_{m\times n}, A_{m\times n}E_n=A_{m\times n}. \text{ 或简写成 } EA=AE=A.$$

可见单位矩阵 E 在矩阵乘法中的作用类似于数 1.

有了矩阵的乘法，就可以定义矩阵的幂. 设 A 是 n 阶方阵，定义

$A^1=A, A^2=A^1A^1, \cdots, A^{k+1}=A^kA^1$，其中 k 为正整数. 这就是说，A^k 就是 k 个 A 连乘. 显然只有方阵，它的幂才有意义.

由于矩阵乘法适合结合律，所以矩阵的幂满足以下运算规律：

$$A^{k+l}=A^kA^l, (A^k)^l=A^{kl},$$

其中 k,l 为正整数. 又因为矩阵乘法一般不满足交换律，所以对于两个 n 阶矩阵 A 与 B，一般来说 $(AB)^k\neq A^kB^k$.

例6 证明 $\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos n\varphi&-\sin n\varphi\\\sin n\varphi&\cos n\varphi\end{pmatrix}$.

定义 5 把矩阵 A 的行换成同序数的列得到一个新矩阵，叫做 A 的转置矩阵，记作 A^T.

例如矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\3 & -1 & 1\end{pmatrix}$ 的转置矩阵为 $A^T=\begin{pmatrix}1 & 3\\2 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}$.

矩阵的转置也是一种运算，满足下述运算规律(假设运算都是可行的)：

(i) $(A^T)^T=A$;

(ii) $(A+B)^T=A^T+B^T$;

(iii) $(\lambda A)^T=\lambda A^T$;

(iv) $(AB)^T=B^TA^T$.

这里仅证明(iv). 设 $A=(a_{ij})_{m\times s}, B=(b_{ij})_{s\times n}$, 记 $AB=C=(c_{ij})_{m\times n}$,

$B^TA^T=D=(d_{ij})_{n\times m}$. 于是按公式(6),有 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{jk}b_{ki}$, B^T 的第 i 行为 $(b_{1i}, \ \cdots \ b_{si})$,

A^T 的第 j 列为 $(a_{j1}, \ \cdots, \ a_{js})^T$, 因此 $d_{ij}=\sum_{k=1}^{s}b_{ki}a_{jk}=\sum_{k=1}^{s}a_{jk}b_{ki}$, 所以

$$d_{ij}=c_{ji}(i=1,2,\cdots,n; j=1,2,\cdots,m), \text{ 即 } D=C^T, \text{ 亦即 } B^TA^T=(AB)^T.$$

例 7 已知 $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\1 & 3 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 7 & -1\\4 & 2 & 3\\2 & 0 & 1\end{pmatrix}$, 求 $(AB)^T$.

设 A 为 n 阶方阵，如果满足 $A^T=A$, 即 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$, 那么 A 称为对称矩阵. 它的元素以主对角线为对称轴对应相等.

例7 设矩阵 $X=(x_1, \ x_2, \ \cdots, \ x_n)^T$ 满足 $X^TX=1, E$ 为 n 阶单位矩阵，

$H=E-2XX^T$, 证明 H 是对称矩阵，且 $HH^T=E$.

证 $H^T=(E-2XX^T)^T=E^T-2(XX^T)^T=E-2XX^T=H$,

所以 H 是对称矩阵.

$$HH^T=H^2=(E-2XX^T)^2=E-4XX^T+4(XX^T)(XX^T)$$

$$=E-4XX^T+4X(X^TX)X^T=E-4XX^T+4XX^T=E.$$

定义 6 由 n 阶方阵 A 的元素所构成的行列式(各元素的位置不变)，称为方阵 A 的行列式，记作 $|A|$ 或 $\det A$.

应该注意，方阵与行列式是两个不同的概念，n 阶方阵是 n^2 个数按一定方式排成的数表，而 n 阶行列式则是这些数(也就是数表 A)按一定的运算法则所确定的一个数.

由 A 确定 $|A|$ 的这个运算满足下述运算规律(设 A,B 为 n 阶方阵，λ 为数)：

(i) $|A^T|=|A|$ (行列式性质 1)；

(ii) $|\lambda A|=\lambda^n|A|$;

(iii) $|AB|=|A||B|$.

我们仅证明(iii). 设 $A=(a_{ij}),B=(b_{ij})$. 记 $2n$ 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & & & \\ \vdots & & \vdots & & O & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & & & \\ -1 & & & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & -1 & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & O \\ -E & B \end{vmatrix},$$

由第一章例 10 可知 $D=|A||B|$,而在 D 中以 b_{1j} 乘第 1 列，b_{2j} 乘 2 列，…，b_{nj} 乘第 n 列，都加到第 $n+j$ 列上($j=1,2,\cdots,n$), 有 $D=\begin{vmatrix} A & C \\ -E & O \end{vmatrix}$,

其中 $C=(c_{ij}),c_{ij}=b_{1j}a_{i1}+b_{2j}a_{i2}+\cdots b_{nj}a_{in}$，故 $C=AB$.

再将 D 的第 j 行与 $n+j$ 行对调(j=1,2, …, n),有 $D=(-1)^n\begin{vmatrix} -E & O \\ A & C \end{vmatrix}$, 从而按第一章例 10 有 $D=(-1)^n|-E||C|=(-1)^n(-1)^n|C|=|C|=|AB|$. 于是 $|AB|=|A||B|$.

由(iii)可知，对于 n 阶矩阵 A,B, 一般来说 $AB\neq BA$, 但总有 $|AB|=|BA|$.

例9 行列式 $|A|$ 的各个元素的代数余子式 A_{ij} 所构成的如下矩阵

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

称为矩阵 A 的伴随矩阵，试证 $AA^*=A^*A=|A|E$.

证　设 $A=(a_{ij})$, 记 $AA^*=(b_{ij})$, 则 $b_{ij}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=|A|\delta_{ij}$,

故
$$AA^*=(|A|\delta_{ij})=|A|(\delta_{ij})=|A|E.$$

类似有 $AA^*=(\sum_{k=1}^{n}A_{ki}a_{kj})=(|A|\delta_{ij})=|A|(\delta_{ij})=|A|E.$

当 $A=(a_{ij})$ 为复矩阵时，用 $\overline{a_{ij}}$ 表示 a_{ij} 的共轭复数，记 $\overline{A}=(\overline{a_{ij}})$．$\overline{A}$ 称为 A 的共轭矩阵.

共轭矩阵满足下述运算规律(设 A,B 为复矩阵，λ 为复数，且运算都是可行的)：

(i) $\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$;

(ii) $\overline{\lambda A}=\overline{\lambda}\,\overline{A}$;

(iii) $\overline{AB}=\overline{A}\,\overline{B}$.

2. 本节小结：矩阵的加法、乘法，数与矩阵的运算，转置矩阵，方阵的行列式，伴随矩阵，共轭矩阵

3. 作业：66 页 4.5)6),5.2)3),6.3),8,9,10

第三节 逆矩阵

一．教学重点：矩阵的运算及性质，转置矩阵，共轭矩阵

二．教学难点：矩阵的运算及性质

三．教学目标：掌握矩阵的运算性质

四．教学过程：

1. 引入

设给定一个线性变换

$$\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n, \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n, \end{cases} \qquad (7)$$

它的系数矩阵是一个 n 阶矩阵 A, 若记 $X=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$, 则线性变换(7)可记作

$$Y=AX. \qquad (8)$$

按克拉默法则，若 $|A|\neq O$, 则由(7)可解出 $x_i=\frac{1}{|A|}(A_{1i}y_1+A_{2i}y_2+\cdots+A_{ni}y_n)$,

即 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 可用 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 线性表示为

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1n}y_n, \\ x_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2n}y_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots + b_{nn}y_n, \end{cases} \tag{9}$$

其中 $b_{ij} = \dfrac{1}{|A|}A_{ij}$, 并且这个表示式是唯一的. (9)是一个从 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 到 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性变换，称为线性变换(7)的逆变换.

若把(9)的系数矩阵记作 B, 则(9)也可记作 $X = BY$. (10)

我们从(8),(10)两式分析变换所对应的方阵 A 与逆变换所对应的方阵 B 之间的关系. 用(10)代入(8)，可得 $Y = A(BY) = (AB)Y$, 可见 AB 为恒等变换所对应的矩阵，故 $AB = E$. 用(8)代入(10)得， $X = B(AX) = (BA)X$, 知有 $BA = E$. 于是有 $AB = BA = E$.

由此我们引入逆矩阵的定义.

2. 新课讲解

定义 7 对于 n 阶矩阵 A, 如果有一个 n 阶矩阵 B, 使 $AB = BA = E$. 则说矩阵 A 是可逆的，并把矩阵 B 称为 A 的逆矩阵.

如果矩阵 A 是可逆的，那么 A 的逆矩阵是唯一的. 这是因为：设 B, C 都是 A 的逆矩阵，则有 $B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C$, 所以 A 的逆矩阵是唯一的.

A 的逆矩阵 A^{-1}. 即若 $AB = BA = E$, 则 $B = A^{-1}$.

定理 1 若矩阵 A 可逆，则 $|A| \neq 0$.

证 A 可逆，即有 A^{-1}，使 $AA^{-1} = E$. 故 $|A| \cdot |A^{-1}| = |E| = 1$, 所以 $|A| \neq 0$.

定理 2 若 $|A| \neq 0$, 则矩阵 A 可逆，且 $A^{-1} = \dfrac{1}{A}A^*$, 其中 A^* 为矩阵 A 的伴随矩阵.

证 由例 9 知 $AA^* = A^*A = |A|E$, 因 $|A| \neq 0$, 故有 $A\dfrac{1}{|A|}A^* = \dfrac{1}{|A|}A^*A = E$, 所以，按逆矩阵的定义，即有 $A^{-1} = \dfrac{1}{A}A^*$.

当 $|A| = 0$ 时，A 称为奇异矩阵，否则称为非奇异矩阵. 由上面的定理可知：A 是可逆矩阵的充分必要条件是 $|A| \neq 0$, 即可逆矩阵就是非奇异矩阵.

推论　若 $AB=E$（或 $BA=E$），则 $B=A^{-1}$.

证　$|A|\cdot|B|=|E|=1,$ 故 $|A|\neq 0,$ 因而 A^{-1} 存在，于是

$$B=EB=(A^{-1}A)B=A^{-1}(AB)=A^{-1}E=A^{-1}.$$

方阵的逆矩阵满足下述运算规律：

(i) 若 A 可逆，则 A^{-1} 亦可逆，且 $(A^{-1})^{-1}=A.$

(ii) 若 A 可逆，数 $\lambda\neq 0,$ 则 λA 可逆，且 $(\lambda A)^{-1}=\dfrac{1}{\lambda}A^{-1}.$

(iii) 若 A,B 为同阶矩阵且均可逆，则 AB 亦可逆，且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$

(iv) 若 A 可逆，则 A^T 亦可逆，且 $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T.$

证　$A^T(A^{-1})^T=(AA^{-1})^T=E^T=E,$ 所以 $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T.$

当 $|A|\neq 0$ 时，还可以定义　$A^0=E, A^{-k}=(A^{-1})^k,$ 其中 k 为正整数. 这样，当 $|A|\neq 0$，λ,μ 为整数时，有　$A^{\lambda}A^{\mu}=A^{\lambda+\mu},(A^{\lambda})^{\mu}=A^{\lambda\mu}.$

3. **例题讲解**

例 10　求方阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

例10 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{pmatrix}$,求矩阵 X 使满足　$AXB=C.$

4. **本节小结**：可逆矩阵及运算规律
5. **作业**：68 页 14, 16, 19

第四节　矩阵分块法

一．**教学重点**：矩阵的分块方法以及利用分块法计算矩阵
二．**教学难点**：利用分块法计算矩阵
三．**教学目标**：掌握矩阵的分块以及算法
四．**教学过程**：
1. 讲解新课

对于行数和列数较高的矩阵 $A,$ 运算时常采用分块法，使大矩阵的运算化成小矩阵的运算. 我们将矩阵 A 用若干条纵线和横线分成许多个小矩阵，每一个小矩阵称为 A 的子块，以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵.

分块矩阵的运算规则与普通矩阵的运算规则相类似，分别说明如下：

(1) 设矩阵 A 与 B 的行数相同、列数相同，采用相同的分块法，有

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix},$$ 其中 A_{ij} 与 B_{ij} 的行数相同、列数相同，那么 $A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & \cdots & A_{1r}+B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1}+B_{sr} & \cdots & A_{sr}+B_{sr} \end{pmatrix}$.

(2) 设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$，$\lambda$ 为数，那么 $\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}$.

(3) 设 A 为 $m\times l$ 矩阵，B 为 $l\times n$ 矩阵，分块成

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix},$$

其中 $A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{it}$ 的列数分别等于 $B_{1j},B_{2j},\cdots,B_{tj}$ 的行数，那么 $AB=\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix}$，其中 $C_{ij}=\sum_{k=1}^{t}A_{ik}B_{kj}(i=1,\cdots,s;j=1,\cdots,r)$.

(4) 设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$，则 $A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}$.

(5) 设 A 为 n 阶矩阵，若 A 的分块矩阵只有在主对角线上有非零子块，其余子块都为零矩阵，且非零子块都是方阵，即 $A=\begin{pmatrix} A_1 & & O \\ & A_2 & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix}$，其中 $A_i(i=1,2,\cdots,s)$ 都是方阵，那么称 A 为分块对角矩阵.

分块对角矩阵的行列式具有下述性质：

$$|A|=|A_1||A_1|\cdots|A_s.|$$

由此性质可知，若$\left|A_i\right| \neq 0(i=1,2,\cdots,s)$，则$\left|A\right| \neq 0$，并有 $A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & O \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s^{1} \end{pmatrix}$.

2. **例题讲解**

例 12 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$，求 AB.

例12 设 $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，求 A^{-1}.

$m\times n$ 矩阵 A 有 m 行，称为矩阵 A 的 m 个行向量. 若第 i 行

$$\alpha_i^T=\left(a_{i1},\quad a_{i2},\quad \cdots,\quad a_{in}\right)，则矩阵 A 便记为\quad A=\begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_m^T \end{pmatrix}.$$

$m\times n$ 矩阵 A 有 n 列，称为矩阵 A 的 n 个列向量，若第 j 列记作 $\alpha_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$，则

$$A=\left(a_1,\quad a_2,\quad \cdots,\quad a_n\right).$$

对于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases}$$

记 $A=(a_{ij}), x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$，其中 A 称为系数矩阵，x 称为未知系数向量，b 称为常数项向量，B 称为增广矩阵. 按分块矩阵的记法，可记

$$B=(A\ \vdots\ b), 或记 B=(A,b)=(a_1,a_2,\cdots,a_n,b).$$

利用矩阵的乘法，次方程可记作 $\quad Ax=b.$

如果把系数矩阵 A 按行分成 m 块，则线性方程组 $Ax=b$ 可记作 $\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_m^T\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$，这就相当于把每个方程 $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=b_i$，记作 $\alpha_i^T x=b_i(i=1,2,\cdots,m)$.

如果把系数矩阵 A 按列分成 n 块，则与 A 相乘的 x 应对应地按行分成 n 块，从而记作

$$(a_1,\quad a_2,\quad \cdots,\quad a_n)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=b,\text{ 即 }\qquad x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_na_n=b.$$

对于矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times s}$ 与矩阵 $B=(b_{ij})_{s\times n}$ 的乘积矩阵 $AB=C=(c_{ij})_{m\times n}$，若把 A 按行分成 m 块，把 B 按列分成 n 块，便有

$$AB=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_m^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1^Tb_1 & \alpha_1^Tb_2 & \cdots & \alpha_1^Tb_n\\ \alpha_2^Tb_1 & \alpha_2^Tb_2 & \cdots & \alpha_2^Tb_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_m^Tb_1 & \alpha_m^Tb_2 & \cdots & \alpha_m^Tb_n\end{pmatrix}=(c_{ij})_{m\times n}\text{，其中}$$

$$(c_{ij})=\alpha_i^Tb_j=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{is})\begin{pmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{sj}\end{pmatrix}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}.$$

由此可进一步领会矩阵相乘的定义.

以对角矩阵 Λ_m 左乘矩阵 $A_{m\times n}$ 时，把 A 按行分块，有

$$\Lambda_mA_{m\times n}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_m^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1\alpha_1^T\\ \lambda_2\alpha_2^T\\ \vdots\\ \lambda_m\alpha_m^T\end{pmatrix},$$

可见以对角矩阵 Λ_m 左乘 A 的结果是 A 的每一行乘以 Λ 中与该行对应的对角元.

以对角矩阵 Λ_n 右乘矩阵 $A_{m\times n}$ 时，把 A 按列分块，有

$$A\Lambda=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}=(\lambda_1a_1,\lambda_2a_2,\cdots,\lambda_na_n),$$

可见以对角矩阵 Λ 右乘 A 的结果是 A 的每一列乘以 Λ 中与该列对应的对角元.

3. **本节小结**：分块矩阵

4. **作业**：69 页 20,22

第三章 矩阵的初等变换与线性方程组

第一节 矩阵的初等变换

一．**教学重点**：掌握利用初等变换化矩阵为最简形

二．**教学难点**：理解矩阵的初等变换的含义

三．**教学目标**：掌握利用初等变换化矩阵为最简形以及用初等变换解线性方程组

四．**教学过程**：

1. 引例 求解线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9, \end{cases}$ （1）

解 （1）$\rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9, \end{cases} \qquad (B_1)$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ -5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6, \\ 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3, \end{cases} \qquad (B_2)$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_4 = -6, \\ x_4 = -3, \end{cases} \qquad (B_3)$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_4 = -3, \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad (B_4)$$

用“回代”的方法求出解：$\begin{cases} x_1 = x_3 + 4, \\ x_2 = x_3 + 3 \\ x_4 = -3 \end{cases}$ 其中 x_3 可任意取值，令 $x_3 = c,$ 方程组的解

可记作 $$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c+4\\c+3\\c\\-3\end{pmatrix},\ \text{即}\ x=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\3\\0\\-3\end{pmatrix},\ \text{其中}\ c\ \text{为任意常数} \qquad (2)$$

小结：(1) 上述解方程组的方法称为消元法；

(2) 始终把方程组看作一个整体变形，用到如下三种变换：

i) 交换方程次序；

ii) 以不等于 0 的数乘某个方程；

iii) 一个方程加上另一个方程的 k 倍.

(3) 上述三种变换都是可逆的。

2. 新课讲解

由于三种变换都是可逆的，所以变换前的方程组与变换后的方程组是同解的. 故这三种变换是同解变换.

因为在上述变换过程中，仅仅只对方程组的系数和常数进行运算，未知量并未参与运算. 若记 $B=\left(A\,|\,b\right)=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}$，则对方程组的变换完全可以转换为对矩阵 B (方程组(1)的增广矩阵)的变换.

定义 1 下面三种变换称为矩阵的初等行变换：

(1) 对调 i, j 两行：$r_i \leftrightarrow r_j$

(2) i 行乘以非零数 k : $r_i \times k$

(3) 将 j 行的 k 倍加到 i 行：$r_i + kr_j$

如果矩阵 A 经有限次初等变换变成矩阵 B ，就称矩阵 A 与 B 等价，记作 $A\sim B$.

矩阵之间的等价关系具有下列性质：

(i) 反身性 $A\sim A$;

(ii) 对称性 若 $A\sim B$, 则 $B\sim A$;

(iii) 专递性 若 $A\sim B, B\sim C$, 则 $A\sim C$.

下面用矩阵的初等行变换来解方程组(1),其过程可与方程组(1)的消元过程一一对照：

$$B=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\2&-1&-1&1&2\\2&-3&1&-1&2\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&2&-2&2&0\\0&-5&5&-3&-6\\0&3&-3&4&-3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&2&-6\\0&0&0&1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B_4\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B_5.$$

B_5 对应方程组 $\begin{cases}x_1-x_3=4,\\x_2-x_3=3,\\ \ x_4=-3,\end{cases}$ 取 x_3 为自由未知量，并令 $x_3=c$，即得

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c+4\\c+3\\c\\-3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\3\\0\\-3\end{pmatrix},\quad \text{其中}\,c\,\text{任意常数}. \tag{2}$$

矩阵 B_4,B_5 都称为行阶梯矩阵，其特点是：可画出一条阶梯线，线的下方全为 0；每个台阶只有一行，台阶数即是非零行的行数，阶梯线的竖线(每段竖线的长度为一行)后面的第一个元素为非零元，也就是非零行的第一个非零元.

行阶梯形矩阵 B_5 还称为行最简形矩阵，其特点：非零行的第一个非零元为 1，且这些非零元所在的列的其它元素都为 0.

用归纳法可证明，对于任意矩阵 A，总可经过有限次初等行变换把它变为行阶梯矩阵和行最简形矩阵.

由行最简形矩阵 B_5，即可写出方程组的解(2),反之, 由方程组的解(2),也可写出矩阵 B_5，由此可猜想到一个矩阵的行最简形矩阵是唯一确定的(行阶梯形矩阵中非零行的行数也是唯一确定的).

对于 $m\times n$ 矩阵 A，总可经过初等变换(行变换和列变换)把它化为标准形

$$F=\begin{pmatrix}E_r&O\\O&O\end{pmatrix}_{m\times n},$$

此标准形由 m,n,r 三个数完全确定，其中 r 就是行阶梯形矩阵中非零行的行数. 所有与 A 等价的矩阵组成的一个集合，称为一个等价类，标准形 F 是这个等价类中形状最简单的矩阵.

3. 本节小结：初等变换化矩阵为最简形, 用行初等变换解线性方程组

4. 作业：92 页 1.3)4)

第二节　矩阵的秩

一．教学重点：掌握利用初等变换化矩阵为最简形

二．教学难点：理解矩阵的初等变换的含义

三．教学目标：掌握利用初等变换化矩阵为最简形以及用初等变换解线性方程组

四．教学过程：

1. 新课讲解

定义 2 在$m\times n$矩阵A中，任取k行与k列$(k\le m,k\le n)$, 位于这些行列交叉处的k^2个元素，不改变它们在A中所处的位置次序而得的k阶行列式，称为矩阵A的k阶子式.

$m\times n$矩阵A的k阶子式共有$C_m^k\cdot C_n^k$个.

定义 3 设在矩阵A中有一个不等于 0 的r阶子式D,且所有$r+1$阶子式(如果存在的话)全等于 0，那么D称为矩阵A的最高阶非零子式，数r称为矩阵A的秩，记作$R(A)$.并规定零矩阵的秩等于 0.

由行列式的性质可知，在A中当所有$r+1$阶子式全等于 0 时，所有高于$r+1$阶的子式也全等于 0 ,因此A的秩$R(A)$就是A中不等于 0 的子式的最高阶数.

显然A的转置矩阵A^T的秩$R(A^T)=R(A)$.

定理 1 若$A\sim B$, 则$R(A)=R(B)$.

证 先证明：若A经一次初等行变换变为B, 则$R(A)\le R(B)$.

设$R(A)=r$, 且A的某个r阶子式$D_r\ne 0$. 当$A\xleftrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j}B$或$A\xleftrightarrow{r_i\times k}B$时，在$B$中总能找到与$D_r$相对应的子式$\overline{D}_r$, 由于$\overline{D}_r=D_r$或$\overline{D}_r=-D_r$或$\overline{D}_r=kD_r$, 因此$\overline{D}_r\ne 0$, 从而$R(B)\ge r$.

当$A\xleftrightarrow{r_i+kr_j}B$时，分三种情形讨论：(1) D_r中不含第i行；(2) D_r中同时含第i行和第j行；(3) D_r中含第i行但不含第j行. 对(1)(2)两种情形，显然B中与D_r对应的子式$\overline{D}_r=D_r\ne 0$, 故$R(B)\ge r$; 对情形(3), 由$\overline{D}_r=\begin{vmatrix}\vdots\\ r_i+kr_j\\ \vdots\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vdots\\ r_i\\ \vdots\end{vmatrix}+k\begin{vmatrix}\vdots\\ r_j\\ \vdots\end{vmatrix}=D_r+k\widehat{D}_r$, 若$\widehat{D}_r\ne 0$, 则因$\widehat{D}_r$中不含第$i$行知$A$中有不含第$i$行的$r$阶非零子式，从而根据情形(1)知$R(B)\ge r$; 若$\widehat{D}_r=0$, 则$\overline{D}_r=D_r\ne 0$, 也有$R(B)\ge r$.

以上证明了若A经一次初等行变换为B, 则$R(A)\le R(B)$. 由于B亦可经一次初等行变换变为A，故也有$R(A)\le R(B)$. 因此$R(A)=R(B)$.

经一次初等行变换矩阵的秩不变，即可知经有限次初等行变换矩阵的秩仍不变.

设A经初等列变换变为B, 则A^T经初等行变换变为B^T,由上段证明知

$R(A^T)=R(B^T)$, 又$R(A)=R(A^T)$, $R(B)=R(B^T)$, 因此$R(A)=R(B)$.

总之,若 A 经有限次初等变换变为 B (即 $A \sim B$), 则 $R(A)=R(B)$.

2. 例题讲解

例 1 求矩阵 A 和 B 的秩, 其中 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & -5\\ 4 & 7 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 3 & -2\\ 0 & 3 & 1 & -2 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

例 2 设 $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0 & 5 & 0\\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1\\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3\\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4\end{pmatrix}$,求矩阵 A 的秩, 并求 A 的一个最高阶非零子式.

例3 设 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & -1\\ 2 & -4 & 8 & 0\\ -2 & 4 & -2 & 3\\ 3 & -6 & 0 & -6\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\\ 4\end{pmatrix}$,求矩阵 A 及矩阵 $B=(A\,|\,b)$ 的秩.

3. 本节小结：矩阵的秩及其求法

4. 作业：93 页 6,3)4),7,4)

第三节 线性方程组的解

一．**教学重点：**掌握利用初等变换化矩阵为最简形

二．**教学难点：**理解矩阵的初等变换的含义

三．**教学目标：**掌握利用初等变换化矩阵为最简形以及用初等变换解线性方程组

四．**教学过程：**

1. 新课讲解

利用系数矩阵 A 和增广矩阵 B 的秩, 可方便地讨论线性方程组 $Ax=b$ 的解,其结论是:

定理 2 n 元齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=0$ 有非零解的充分必要条件是系数矩阵的秩

$$R(A)<n.$$

证 先证必要性. 设方程组 $Ax=0$ 有非零解，要证 $R(A)<n$.用反证法, 设 $R(A)=n$, 则在 A 中应有一个 n 阶非零子式 D_n, 从而 D_n 所对应的 n 个方程只有零解(根据克拉默定理)，这与原方程组有非零解相矛盾，因此 $R(A)=n$ 不能成立，即 $R(A)<n$.

再证充分性. 设 $R(A)=r<n$, 则 A 的行阶梯形矩阵只含 r 个非零行，从而知其中有 $n-r$ 个自由未知量. 任取一个自由未知量为 1，其余自由未知量为 0，即可得方程组的一个非零解.

定理 3　n 元非齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=b$ 有解的充分必要条件是系数矩阵 A 的秩等于增广矩阵 $B=(A,b)$ 的秩.

证　先证必要性. 设方程组 $Ax=b$ 有解，要证 $R(A)=R(B)$.用反证法，设 $R(A)<R(B)$, 则 B 的行阶梯形矩阵中最后一个非零行对应矛盾方程 0=1，这与方程组有解相矛盾. 因此 $R(A)=R(B)$.

再证充分性. 设 $R(A)=R(B)$, 要证方程组有解，把 B 化为行阶梯形矩阵，设 $R(A)=R(B)=r(r\le n)$,则 B 的行阶梯形矩阵中含 r 个非零行,把这 r 行的第一个非零元所对应的未知量作为非自由未知量，其余 $n-r$ 个作为自由未知量，并令 $n-r$ 个自由未知量全取 0，即可得方程组的一个解.

当 $R(A)=R(B)=n$ 时,方程组没有自由未知量,只有唯一解. 当 $R(A)=R(B)=r<n$ 时，方程组有 $n-r$ 个自由未知量，令它们分别等于 $c_1,c_2,\cdots,c_{n-r}$, 可得含 $n-r$ 个参数 $c_1,c_2,\cdots,c_{n-r}$ 的解，这些参数可任意取值，因此这时方程组有无限多个解.

2. 例题讲解

例 4　求解齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+x_4=0, \\ 2x_1+x_2-2x_3-2x_4=0, \\ x_1-x_2-4x_3-3x_4=0. \end{cases}$

例 5　求解非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=1, \\ 3x_1-x_2+5x_3-3x_4=2, \\ 2x_1+x_2+2x_3-2x_4=3. \end{cases}$

例6　求解非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-x_4=1, \\ 3x_1-x_2-3x_3+4x_4=4, \\ x_1+5x_2-9x_3-8x_4=0. \end{cases}$

例7　设有线性方程组 $\begin{cases} (1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=3, \\ x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda, \end{cases}$ 问 λ 取何值时，此方程组(1)有唯一解; (2)无解；(3)有无限多个解？并在有限多解时求其通解.

3. 本节小结：线性方程组的解

4. 作业：94 页 8,9,10

第四节　初等矩阵

一．**教学重点**：三种行(列)初等变换，逆矩阵的求法

二．**教学难点**：逆矩阵的求法

三．**教学目标**：掌握三种行(列)初等变换和逆矩阵的求法

四．**教学过程**：

1. 新课讲解

定义 4　由单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵.

三种初等变换对应着三种初等矩阵.

(1) 对调两行或两列

把单位矩阵中第 i, j 两行对调 $(r_i \leftrightarrow r_j)$, 得初等矩阵

$$E(i,j)=\left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 0 & & \cdots & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & \cdots & & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right)\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow 第i行 \\ \\ \\ \\ \leftarrow 第j行 \\ \\ \\ \\
\end{array}$$

用 m 阶初等矩阵 $E_m(i,j)$ 左乘矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, 得

$$E_m(i,j)A=\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}\begin{array}{l}
\\ \\ \leftarrow 第i行 \\ \\ \leftarrow 第j行 \\ \\ \\
\end{array}$$

其结果相当于对矩阵 A 施行第一种初等行变换: 把 A 的第 i 行与第 j 行对调 $(r_i \leftrightarrow r_j)$. 类似地，以 n 阶初等矩阵 $E_n(i,j)$ 右乘矩阵 A, 其结果相当于对矩阵 A 施行第一种初等列变换: 把 A 的第 i 列与第 j 列对调 $(c_i \leftrightarrow c_j)$.

(2) 以数 $k \neq 0$ 乘某行或某列

以数 $k \neq 0$ 乘单位矩阵的第 i 行 $(r_i \times k)$, 得初等矩阵

$$E(i(k))=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&k&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \\ \leftarrow 第i行\\ \\ \\ \\ \end{array}$$

可以验证: 以 $E_m(i(k))$ 左乘矩阵 A，其结果相当于以数 k 乘 A 的第 i 行 $(r_i\times k)$, 以 $E_n(i(k))$ 右乘矩阵 A，其结果相当于以数 k 乘 A 的第 i 列 $(c_i\times k)$.

(3) 以数 k 乘某行(列)加到另一行(列)上去

以数 k 乘 E 的第 j 行加到第 i 行上 (r_i+kr_j) [或以 k 乘 E 的第 i 列加到第 j 列上 (c_j+kc_i)]，得到初等矩阵

$$E(ij(k))=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&\cdots&k&&\\&&&\ddots&\vdots&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \leftarrow 第i行\\ \\ \leftarrow 第j行\\ \\ \\ \end{array}$$

可以验证: 以 $E_m(ij(k))$ 左乘矩阵 A，其结果相当于把 A 的第 j 行乘 k 加到第 i 行上 (r_i+kr_j)，以 $E_n(ij(k))$ 右乘矩阵 A，其结果相当于把 A 的第 i 列乘 k 加到第 j 列上 (c_j+kc_i).

定理 4 设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵, 对 A 施行一次初等行变换, 相当于在 A 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵；对 A 施行一次初等列变换，相当于在 A 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵.

初等变换对应初等矩阵, 由初等变换可逆，可知初等矩阵可逆，且此初等变换的逆变换也就对应此初等矩阵的逆矩阵.

定理 5 设 A 为可逆矩阵, 则存在有限个初等矩阵 $P_1,P_2,\cdots,P_l$, 使 $A=P_1P_2\cdots P_l$.

证 因 $A\sim E$, 故 E 经有限次初等变换可变成 A，也就是存在有限个初等矩阵 $P_1,P_2,\cdots,P_l$, 使 $P_1P_2\cdots P_rEP_{r+1}\cdots P_l=A$, 即 $A=P_1P_2\cdots P_l$.

推论　$m\times n$ 矩阵 $A\sim B$ 的充分必要条件是: 存在 m 阶可逆矩阵 P 及 n 阶可逆矩阵 Q, 使 $PAQ=B$.

由定理 5, 还可得一种求逆矩阵的方法:

当 $|A|\neq 0$ 时, 由 $A=P_1P_2\cdots P_l$, 有 $P_l^{-1}P_{l-1}^{-1}\cdots P_1^{-1}A=E$,　　　(i)

及
$$P_l^{-1}P_{l-1}^{-1}\cdots P_1^{-1}E=A^{-1}.\qquad\text{(ii)}$$

(i)式表明 A 经一系列初等行变换可变成 E, (ii)式表明 E 经这同一系列初等行变换即变成 A^{-1}. 用分块矩阵形式, (i),(ii)两式可合并为 $P_l^{-1}P_{l-1}^{-1}\cdots P_1^{-1}(A\mid E)=(E\mid A^{-1})$, 即对 $n\times 2n$ 矩阵 $(A\mid E)$ 施行初等行变换, 当把 A 变成 E 时, 原来的 E 就变成 A^{-1}.

2. 例题讲解

例 8 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$, 求 A^{-1}.

例 9　求矩阵 X, 使 $AX=B$, 其中 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&5\\3&1\\4&3\end{pmatrix}$.

本例用初等行变换的方法求得 $X=A^{-1}B$, 如果要求 $Y=CA^{-1}$, 则可对矩阵 $\begin{pmatrix}A\\C\end{pmatrix}$ 作初等列变换，使 $\begin{pmatrix}A\\C\end{pmatrix}\xleftrightarrow{\text{列变换}}\begin{pmatrix}E\\CA^{-1}\end{pmatrix}$, 即可得 $Y=CA^{-1}$. 不过通常都习惯作初等行变换，那么可改为对 (A^T,C^T) 作初等行变换，使 $(A^T,C^T)\xleftrightarrow{\text{行变换}}(E,(A^T)^{-1}C^T)$, 即可得

$Y^T=(A^{-1})^TC^T=(A^T)^{-1}C^T$, 从而求得 Y.

3. 本节小结：初等变换，逆矩阵的求法

4. 作业：94 页 11,12

第四章　向量组的线性相关性

第一节　n维向量

一．教学重点：n维向量的定义，n维行向量，n维列向量

二．教学难点：n维向量的定义

三．教学目标：掌握n维向量的定义，和具体的几个例子

四．教学过程：

1. 新课讲解

定义 1 n个有次序的数$a_1,a_2,\cdots,a_n$所组成的数组成为n维向量, 这n个数称为该向量的n个分量, 第i个数a_i称为第i个分量.

分量全为实数的向量称为实向量, 分量为复数的向量称为复向量. 本书中除特别指明者外, 一般只讨论实向量.

两种特殊的n维向量:

(1) n维列向量$\alpha=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$;

(2) n维行向量$\alpha^T=\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)$.

本书中，列向量用黑体小写字母a,b,α,β等表示, 行向量则用a^T,b^T,α^T,β^T等表示. 所讨论的向量在没有指明是行向量还是列向量时，都当作列向量.

2. 例题讲解

1. 我们把 3 维向量的全体所组成的集合 $R^3=\{r=(x,y,z)^T \mid x,y,z\in R\}$叫做三维向量空间. 在点空间取定坐标系以后，空间中的点$P(x,y,z)$与 3 维向量$r=(x,y,z)^T$之间有一一对应的关系，因此，向量空间可以类比为取定了坐标系的点空间.

2. 向量的集合 $\pi=\{r=(x,y,z)^T \mid ax+by+cz=d\}$也叫做向量空间$R^3$中的平面.

3. n维向量的全体所组成的集合 $R^n=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \mid x_1,x_2,\cdots,x_n\in R\}$叫做$n$维向量空间. n维向量的集合 $\pi=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \mid ax_1+ax_2+\cdots+a_nx_n=b\}$叫做$n$维向量空间$R^n$中的$n-1$超平面.

3. 本节小结：　n维向量的含义

4. 作业：

第二节 向量组的线性相关性

一．教学重点：n 维向量的定义, n 维行向量，n 维列向量

二．教学难点：n 维向量的定义

三．教学目标：掌握 n 维向量的定义，和具体的几个例子

四．教学过程：

1. 引入

若干个同维数的列向量(或同维数的行向量)所组成的集合叫做向量组. 例如一个 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$ 有 n 个 m 维列向量 $\alpha_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix},(j=1,2,\cdots,n)$

它们组成的向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 称为矩阵 A 的列向量组.

$m\times n$ 矩阵 A 又有 m 个 n 维行向量 $\alpha_i^T=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}),(i=1,2,\cdots,m)$

它们组成的向量组 $\alpha_1^T,\alpha_2^T,\cdots,\alpha_m^T$ 称为矩阵 A 的行向量组.

反之, 由有限个向量所组成的向量组可以构成一个矩阵. 例如

m 个 n 维列向量所组成的向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 构成一个 $n\times m$ 矩阵

$$A=(a_1,a_2,\cdots,a_m);$$

m 个 n 维行向量所组成的向量组 $\beta_1^T,\beta_2^T,\cdots,\beta_m^T$ 构成一个 $m\times n$ 矩阵 $B=\begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_m^T \end{pmatrix}$.

2. 新课讲解

定义 2 给定向量组 $A:a_1,a_2,\cdots,a_m$，对于任何一组实数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，向量

$$k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_ma_m$$

称为向量组 A 的一个线性组合，$k_1,k_2,\cdots,k_m$ 称为这个线性组合的系数.

给定向量组 $A:a_1,a_2,\cdots,a_m$ 和向量 b，如果存在一组数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$, 使

$$b=\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\cdots+\lambda_ma_m,$$

则向量 b 是向量组 A 的线性组合, 这时称向量 b 能由向量组 A 线性表示.

向量 b 能由向量组 A 线性表示, 也就是方程组 $x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_ma_m=b$ 有解.

定理 1 向量 b 能由向量组 A 线性表示的充分必要条件是矩阵 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$ 的秩

等于矩阵 $B=(a_1,a_2,\cdots,a_m,b)$ 的秩.

定义 3 设有两个向量组 $A:a_1,a_2,\cdots,a_m$ 及 $B:b_1,b_2,\cdots,b_s$，若 B 组中的每个向量都能由向量组 A 线性表示, 则称向量组 B 能由向量组 A 线性表示. 若向量组 A 与向量组 B 能相互线性表示, 则称这两个向量组等价.

把向量组 A 和 B 所构成的矩阵依次记作 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$ 和 $B=(b_1,b_2,\cdots,b_s)$, B 组能由 A 组线性表示, 即对每个向量 $b_j\,(j=1,2,\cdots,s)$ 存在 $k_{1j},k_{2j},\cdots,k_{mj}$，使

$$b_j=k_{1j}a_1+k_{2j}a_2+\cdots+k_{mj}a_m=(a_1,a_2,\cdots,a_m)\begin{pmatrix}k_{1j}\\k_{2j}\\\vdots\\k_{mj}\end{pmatrix},$$

从而
$$(b_1,b_2,\cdots,b_s)=(a_1,a_2,\cdots,a_m)\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&\cdots&k_{1s}\\k_{21}&k_{22}&\cdots&k_{2s}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\k_{m1}&k_{m2}&\cdots&k_{ms}\end{pmatrix}.$$

这里, 矩阵 $K_{m\times s}(k_{ij})$ 称为这一线性表示的系数矩阵.

由此可知, 若 $C_{m\times n}=A_{m\times s}B_{s\times n}$, 则矩阵 C 的列向量组能由矩阵 A 的列向量组线性表示, B 为这一表示的系数矩阵:

$$(c_1,c_2,\cdots,c_n)=(a_1,a_2,\cdots,a_s)\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{s1}&b_{s2}&\cdots&b_{sn}\end{pmatrix};$$

同时，C 的行向量组能由 B 的行向量组线性表示，A 为这一表示的系数矩阵:

$$\begin{pmatrix}\gamma_1^T\\\gamma_2^T\\\vdots\\\gamma_m^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1s}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2s}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{ms}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1^T\\\beta_2^T\\\vdots\\\beta_s^T\end{pmatrix}.$$

设矩阵 A 经过初等行变换变成矩阵 B，则 B 的每个行向量都是 A 的行向量组的线性组合, 即 B 的行向量组能由 A 的行向量组线性表示. 由于初等变换可逆, 知矩阵 B 亦可经初等行变换变为 A，从而 A 的行向量组也能由 B 的行向量组线性表示. 于是 A 的行向量组与 B 的行向量组等价.

类似可知, 若矩阵 A 经初等列变换变成矩阵 B，则 A 的列向量组与 B 的列向量组等价.

定义 4 给定向量组 $A:a_1,a_2,\cdots,a_m$，如果存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使

$$k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_ma_m=0,$$

则称向量组 A 是线性相关的, 否则称它线性无关.

向量组 $A: a_1, a_2, \cdots, a_m (m \geq 2)$ 线性相关, 也就是在向量组 A 中至少有一个向量组能由其余 $m-1$ 个向量线性表示. 这是因为:

如果向量组 A 线性相关, 则有不全为 0 的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 使

$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_m a_m = 0$, 因 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 不全为 0, 不妨设 $k_1 \neq 0$, 于是便有

$a_1 = \dfrac{-1}{k_1}(k_2 a_2 + \cdots + k_m a_m)$, 即 a_1 能由 $a_2, \cdots, a_m$ 线性表示.

向量组 $A: a_1, a_2, \cdots, a_m$ 构成矩阵 $A = (a_1, a_2, \cdots, a_m)$, 向量组 A 线性相关, 就是齐次线性方程组 $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_m a_m = 0$, 即 $Ax = 0$ 有非零解.

定理 2 向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 线性相关的充分必要条件是它所构成的 $A = (a_1, a_2, \cdots, a_m)$ 的秩小于向量个数 m; 向量组线性无关的充分必要条件是 $R(A) = m$.

定理 3 (1) 若向量组 $A: a_1, a_2, \cdots, a_m$ 线性相关,则向量组 $B: a_1, a_2, \cdots, a_m, a_{m+1}$ 也线性相关. 反言之，若向量组 B 线性无关，则向量组 A 也线性无关.

(2) 设 $a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{rj} \end{pmatrix}, b_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{rj} \\ a_{r+1,j} \end{pmatrix}, (j = 1, 2, \cdots, m)$

即向量 a_j 添上一个分量后得向量 b_j. 若向量组 $A: a_1, a_2, \cdots, a_m$ 线性无关，则向量组 $B: b_1, b_2, \cdots, b_m$ 也线性无关. 反言之，若向量组 B 线性相关，则向量组 A 也线性相关.

(3) m 个 n 维向量组成的向量组，当维数 n 小于向量个数 m 时一定线性相关.

(4) 设向量组 $A: a_1, a_2, \cdots, a_m$ 线性无关，而向量组 $B: a_1, a_2, \cdots, a_m, b$ 线性相关，则向量 b 必能由向量组 A 线性表示， 且表式是唯一的.

证 这些结论都可利用定理 2 来证明.

(1) 记 $A = (a_1, a_2, \cdots, a_m)$, $B = (a_1, a_2, \cdots, a_m, a_{m+1})$, 有 $R(B) \leq R(A) + 1$. 若向量组 A 线性相关，则根据定理 2，有 $R(A) < m$, 从而 $R(B) \leq R(A) + 1 < m + 1$, 因此根据定理 2 知向量组 B 线性相关.

结论(1)是对向量组增加 1 个向量而言的，增加多个向量结论也仍成立.

(2) 记 $A_{r \times m} = (a_1, a_2, \cdots, a_m)$, $B_{(r+1) \times m} = (b_1, b_{2,} \cdots, b_m)$, 有 $R(A) \leq R(B)$. 若向量组 A

线性无关，则$R(A)=m,$从而$R(B)\geq m.$但$R(B)\leq m$(因B只有m列)，故$R(B)=m,$因此向量组B线性无关.

结论(2)是对向量增加一个分量而言的，如果增加多个分量，结论也仍然成立.

(3) m个n维向量$a_1,a_2,\cdots,a_m$构成矩阵$A_{n\times m}=(a_1,a_2,\cdots,a_m),$有$R(A)\leq n.$若$n<m,$则$R(A)<m,$故$m$个向量$a_1,a_2,\cdots,a_m$线性相关.

(4) $A=(a_1,a_2,\cdots,a_m),\ B=(a_1,a_2,\cdots,a_m,b),$有$R(A)\leq R(B).$因$A$组线性无关，有$R(A)=m;$因$B$组线性相关，有$R(B)<m+1.$所以$m\leq R(B)<m+1,$即有$R(B)=m.$

由$R(A)=R(B)=m,$根据上章定理3，知方程组$(a_1,\cdots,a_m)x=b$有唯一解，即向量b能由向量组A线性表示，且表示式是唯一的.

3.例题讲解

例1 n维向量$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots 0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$. 称为$n$维单位坐标向量组，试讨论它的线性相关性.

例2 已知$a_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix},a_3=\begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix},$试讨论向量组$a_1,a_2,a_3$及向量组$a_1,a_2$的线性相关性.

例3 已知向量组a_1,a_2,a_3线性无关，$b_1=a_1+a_2,b_2=a_2+a_3,b_3=a_1+a_3,$试证向量$b_1,b_2,b_3$线性无关.

4．本节小结：向量组的线性相关性

5．作业：128页4,5

第三节　向量组的秩

一．教学重点：向量组的秩,向量组的等价，极大无关组

二．教学难点：向量组的秩

三．教学目标：掌握求向量组的秩的方法和判断向量组的线性相关性

四．教学过程：

1. 新课讲解

定义1 设有向量组A，如果在A中能选出r个向量$a_1,a_2,\cdots,a_r,$满足

(i) 向量组$a_1,a_2,\cdots,a_r$线性无关;

(ii) 向量组 A 中任意 $r+1$ 向量(如果 A 中有 $r+1$ 个向量的话)都线性相关, 那么称向量组 A_0 是向量组 A 的一个最大线性无关向量组(简称最大无关组); 最大无关组所含向量个数 r 称为向量组 A 的秩.

只含零向量的向量组没有最大无关组, 规定它的秩为 0.

定理 4 矩阵的秩等于它的列向量组的秩, 也等于它的行向量组的秩.

证 设 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_m), R(A)=r$, 并设 r 阶子式 $D_r\neq 0$. 根据定理 2, 由 $D_r\neq 0$ 知 D_r 所在的 r 列线性无关; 又由 A 中所有 $r+1$ 阶子式均为零, 知 A 中任意 $r+1$ 个列向量都线性相关. 因此 D_r 所在的 r 列是 A 的列向量组的一个最大无关组, 所以列向量组的秩等于 r.

类似可证明矩阵 A 的行向量组的秩也等于 $R(A)=r$.

从上述证明中可见: 若 D_r 是矩阵 A 的一个最高阶非零子式, 则 D_r 所在的 r 列即是列向量组的一个最大无关组, D_r 所在的 r 行即是行向量组的一个最大无关组.

向量组的最大无关组一般不是唯一的. 如例 2 $(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&2&4\\1&5&7\end{pmatrix}$, 由

$R(a_1,a_2)=2$, 知 a_1,a_2 线性无关; 由 $R(a_1,a_2,a_3)=2$ 知 a_1,a_2,a_3 线性相关, 因此 a_1,a_2 是向量组 a_1,a_2,a_3 的一个最大无关组.

此外, 由 $R(a_1,a_2)=2$ 及 $R(a_2,a_3)=2$ 可知 a_1,a_3 和 a_2,a_3 都是向量组 a_1,a_2,a_3 的最大无关组.

向量组 A 和它自己的最大无关组 A_0 是等价的. 这是因为 A_0 组是 A 组的一个部分组, 故 A_0 组总能由 A 组线性表示(A 中每个向量都能由 A 组线性表示); 而由定义 5 的条件(ii)知, 对于 A 中任意向量 $a, r+1$ 个向量 $a_1,a_2,\cdots,a_r,a$ 线性相关, 而 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 线性无关, 根据定理 3(4)知 a 能由 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 线性表示,即 A 组能由 A_0 组线性表示. 所以 A 组与 A_0 组等价.

例4 全体 n 维向量构成的向量组记作 R^n, 求 R^n 的一个最大无关组及 R^n 的秩.

例5 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}$, 求矩阵 A 的列向量组的一个最大无关组,

并把不属最大无关组的列向量用最大无关组线性表示.

定理 5 设向量组 B 能由向量组 A 线性表示, 则向量组 B 的秩不大于向量组 A 的秩.

证 设向量组 B 的一个最大无关组为 $B_0: b_1,\cdots,b_r$, 向量组 A 的一个最大无关组为 $A_0: a_1,\cdots,a_s$, 要证 $r\le s$.

因 B_0 组能由 B 组线性表示, B 组能由 A 组线性表示, A 组能由 A_0 组线性表示, 故 B_0 组能由 A_0 组线性表示, 即存在系数矩阵 $K_{sr}=(k_{ij})$ 使

$$(b_1,\cdots,b_r)=(a_1,\cdots,a_s)\begin{pmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ k_{s1} & \cdots & k_{sr} \end{pmatrix}.$$

如果 $r>s$, 则方程组 $K_{sr}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}=0$ (简记为 $Kx=0$) 有非零解(因 $R(K)\le s<r$), 从而方程组 $(a_1,\cdots,a_s)Kx=0$ 有非零解, 即 $(b_1,\cdots,b_r)x=0$ 有非零解, 这与 B_0 组线性无关矛盾,因此 $r>s$ 不能成立，所以 $r\le s$.

推论 1 等价的向量组的秩相等.

证 设向量组 A 与向量组 B 的秩依次为 s 和 r, 因两个向量组等价，即两个向量组能相互线性表示，故 $s\le r$ 与 $r\le s$ 同时成立，所以 $r=s$.

推论 2 设 $C_{m\times n}=A_{m\times s}B_{s\times n}$, 则 $R(C)\le R(A), R(C)\le R(B)$.

证 设矩阵 C 和 A 用其列向量表示为 $C=(c_1,\cdots,c_n), A=(a_1,\cdots,a_s)$. 而 $B=(b_{ij})$, 由 $(c_1,\cdots,c_n)=(a_1,\cdots,a_s)\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}$, 知矩阵 C 的列向量组能由 A 的列向量组线性表示，因此 $R(C)\le R(A)$.

因 $C^T=B^TA^T$, 由上段证明知 $R(C^T)\le R(B^T)$, 即 $R(C)\le R(B)$.

推论 3 (最大无关组的等价定义) 设向量组 B 是向量组 A 的部分组, 若向量组 B 线性无关, 且向量组 A 能由向量组 B 线性表示, 则向量组 B 是向量组 A 的一个最大无关组.

证 设向量组 B 含 r 个向量, 则它的秩为 r. 因 A 组能由 B 组线性表示, 故 A 组的秩 $\le r$, 从而 A 组中任意 $r+1$ 个向量线性相关. 所以向量组 B 满足定义 5 所规定的最大无关组的条件.

例 6 设向量组 B 能由向量组 A 线性表示, 且它们的秩相等, 证明向量组 A 与向量组 B

线性表示.

证 向量组 A 和 B 的秩都为 r. 因 B 组能由 A 组线性表示, 故 A 组和 B 组合并而成的向量组 (A,B) 能由 A 组线性表示, 而 A 组是 (A,B) 组的部分组, 故 A 组总能由 (A,B) 组线性表示, 所以 (A,B) 组与 A 组等价, 因此 (A,B) 组的秩也为 r. 又因 B 组的秩为 r ,故 B 组的最大无关组 B_0 含 r 个向量, 因此 B_0 组也是 (A,B) 组的最大无关组, 从而 (A,B) 组与 B_0 组等价. 由 A 组与 (A,B) 组等价，(A,B) 组与 B_0 组等价, B_0 与 B 等价, 推知 A 组与 B 组等价.

例 7 已知 $(a_1,a_2)=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \\ -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},(b_1,b_2)=\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 6 & -4 \\ -5 & 3 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}$, 证明向量组 a_1,a_2 与 b_1,b_2 等价.

2. 本节小结：向量组的秩，向量组的等价

3. 作业： 128 页 6,2）7,2)8.

第四节 向量空间

一．教学重点：向量空间的含义

二．教学难点：向量空间的含义

三．教学目标：掌握向量空间的定义,掌握判断一个向量组是否为向量空间

四．教学过程：

1. 新课讲解

定义 6 设 V 为 n 维向量的集合, 如果集合 V 非空, 且集合 V 对于加法及数乘两种运算封闭, 那么就称集合 V 为向量空间.

所谓封闭, 是指在集合 V 中可以进行加法及数乘两种运算. 具体地说, 就是: 若 $a\in V$,$b\in V$, 则 $a+b\in V$；若 $a\in V$,$\lambda\in R$, 则 $\lambda a\in V$.

例8 3 维向量的全体 R^3, 就是一个向量空间. 因为任意两个 3 维向量之和仍然是 3 维向量, 数 λ 乘 3 维向量也仍然是 3 维向量, 它们都属于 R^3.

类似地, n 维向量的全体 R^n, 也是一个向量空间.

例9 集合 $V=\{x=(0,x_2,\cdots,x_n)^T \mid x_2,\cdots,x_n\in R\}$ 是一个向量空间. 因为若

$$a=(0,a_2,\cdots,a_n)^T\in V, b=(0,b_1,\cdots,b_n)^T\in V,\ \lambda\in R,$$

则
$$a+b=(0,a_1+b_1,\cdots,a_n+b_n)^T\in V, \lambda a=(0,\lambda a_2,\cdots,\lambda a_n).$$

例 10 集合 $V=\{x=(1,x_2,\cdots,x_n)^T \mid x_2,\cdots,x_n\in R\}$ 不是向量空间, 因为若

$a=(1,a_2,\cdots,a_n)^T\in V$, 则 $2a=(2,2a_2,\cdots,2a_n)^T\notin V$.

例 11 设 a,b 为两个已知的 n 维向量, 集合 $V=\{x=\lambda a+\mu b\mid\lambda,\mu\in R\}$ 是一个向量空间. 因为若 $x_1=\lambda_1 a+\mu_1 b, x_2=\lambda_2 a+\mu_2 b$, 则有 $x_1+x_2=(\lambda_1+\lambda_2)a+(\mu_1+\mu_2)b\in V$, $kx_1=(k\lambda_1)a+(k\mu_1)b\in V$. 这个向量空间称为由向量 a,b 所生成的向量空间.

一般地, 由向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 所生成的向量空间为

$$V=\{x=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_m a_m\mid\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\in R\}.$$

例 12 设向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 与向量组 $b_1,b_2,\cdots,b_s$ 等价, 记

$$V_1=\{x=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_m a_m\mid\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\in R\},$$

$$V_2=\{x=\mu_1 b_1+\mu_2 b_2+\cdots+\mu_s b_s\mid\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_s\in R\},$$

试证 $V_1=V_2$.

证 设 $x\in V_1$, 则 x 可由 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 线性表示. 因 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 可由 $b_1,b_2,\cdots,b_s$ 线性表示, 故 x 可由 $b_1,b_2,\cdots,b_s$ 线性表示, 所以 $x\in V_2$. 这就是说, 若 $x\in V_1$, 则 $x\in V_2$. 因此 $V_1\subset V_2$. 类似地可证: 若 $x\in V_2$, 则 $x\in V_1$, 因此 $V_2\subset V_1$.

因为 $V_1\subset V_2$, $V_2\subset V_1$, 所以 $V_1=V_2$.

定义 7 设向量空间 V_1 及 V_2, 若 $V_1\subset V_2$, 就称 V_1 是 V_2 的子空间.

定义 8 设 V 为向量空间,如果 r 个向量 $a_1,a_2,\cdots,a_r\in V$, 且满足

(i) $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 线性无关;

(ii) V 中任一向量都可由 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 线性表示,

那么向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 就称为向量空间 V 的一个基, r 称为向量空间 V 的维数, 并称 V 为 r 维向量空间.

如果向量空间 V 没有基, 那么 V 的维数为 0. 0 维向量空间只含一个零向量 $\mathbf{0}$.

若把向量空间 V 看作向量组, 则按第三节定理 5 的推论 3 可知, V 的基就是向量组的最大线性无关组, V 的维数就是向量组的秩.

例如, 向量空间 $V=\{x=(0,x_2,\cdots,x_n)^T\mid x_2,\cdots,x_n\in R\}$ 的一个基可取为:

$e_2=(0,1,0,\cdots,0)^T,\cdots,e_n=(0,0,\cdots,1)^T$. 并由此可知它是 $n-1$ 维向量空间.

由向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 所生成的向量空间

$$V=\{x=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_m a_m \mid \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\in R\},$$

显然向量空间 V 与向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 等价, 所以向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 的最大无关组就是 V 的一个基, 向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 的秩就是 V 的维数.

若向量空间 $V\subset R^n$, 则 V 的维数不会超过 n. 并且, 当 V 的维数为 n 时, $V=R^n$.

若向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 是向量空间 V 的一个基, 则 V 可表示为

$$V=\{x=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_r a_r \mid \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r\in R\},$$

这就较清楚地显示出向量空间 V 的构造.

例13 设 $A=(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{pmatrix},B=(b_1,b_2)=\begin{pmatrix}1&4\\0&3\\-4&2\end{pmatrix}$,

验证 a_1,a_2,a_3 是 R^3 的一个基, 并把 b_1,b_2 用这个基线性表示.

2. 本节小结：向量空间的定义

3. 作业：129 页 13,14,15,16

第五节 线性方程组的解的结构

一．教学重点：线性方程组的解的结构

二．教学难点：线性方程组的解的结构

三．教学目标：掌握求解线性方程组的解的方法

四．教学过程：

1.引入

我们用向量组线性相关性的理论来讨论线性方程组的解. 先讨论齐次线性方程组.

设有齐次线性方程组 $$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0,\end{cases}\qquad(1)$$

记 $$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},$$

则(1)式可写成向量方程 $\quad Ax=0.$ (2)

若 $x_1=\xi_{11}, x_2=\xi_{21}, \cdots, x_n=\xi_{n1}$ 为(1)的解, 则

$$x=\xi_1=\begin{pmatrix}\xi_{11}\\ \xi_{21}\\ \vdots\\ \xi_{n1}\end{pmatrix}$$

称为方程组(1)的解向量, 它也就是向量方程(2)的解.

2. 新课讲解

性质 1 若 $x=\xi_1, x=\xi_2$ 为(2)的解, 则 $x=\xi_1+\xi_2$ 也是(2)的解.

证 只要验证 $x=\xi_1+\xi_2$ 满足方程(2): $A(\xi_1+\xi_2)=A\xi_1+A\xi_2=0+0=0.$

性质 2 若 $x=\xi_1$ 为(2)的解, k 为实数, 则 $x=k\xi_1$ 也是(2)的解.

证 $$A(k\xi_1)=k(A\xi_1)=k0=0.$$

若用 S 表示方程组(1)的全体解向量所组成的集合, 则性质 1,2 即为

1. 若 $\xi_1\in S, \xi_2\in S$, 则 $\xi_1+\xi_2\in S$;

2. 若 $\xi_1\in S, k\in R$, 则 $k\xi_1\in S$.

这就说明集合 S 对向量的线性运算是封闭的, 所以集合 S 是一个向量空间, 称为齐次线性方程组(1)的解空间.

下面我们来求解空间 S 的一个基.

设系数矩阵 A 的秩为 r, 并不妨设 A 的前 r 个列向量线性无关, 于是 A 的行最简形矩阵为

$$B=\begin{pmatrix}1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{r,n-r}\\ 0 & & & \cdots & & 0\\ \vdots & & & & & \vdots\\ 0 & & & \cdots & & 0\end{pmatrix},$$

与 B 对应, 即有方程组 $\begin{cases}x_1=-b_{11}x_{r+1}-\cdots-b_{1,n-r}x_n,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_r=-b_{r1}x_{r+1}-\cdots-b_{r,n-r}x_n.\end{cases}$ (3)

由于 A 与 B 的行向量组等价, 故方程组(1)与(3)同解. 在(3)中, 任给 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 一组值, 即唯一确定 $x_1,\cdots,x_r$ 的值, 就得(3)的一个解, 也就是(1)的解. 现在令 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 取下列

$n-r$ 组数:

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

由(3)即依次可得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \end{pmatrix},$$

从而求得(3)[也就是(1)]的 $n-r$ 个解.

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \xi_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

下面证明 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 就是解空间 S 的一个基.

首先, 由于 $(x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n)^T$ 所取的 $n-r$ 个 $n-r$ 维向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

线性无关, 所以在每个向量前面添加 r 个分量而得到的 $n-r$ 个 n 维向量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 也线性无关.

其次, 证明(1)的任一解 $x = \xi = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \\ \lambda_{r+1} \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ 都可由 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 线性表示. 为此, 作向量

$$\eta = \lambda_{r+1}\xi_1 + \lambda_{r+2}\xi_2 + \cdots + \lambda_n \xi_{n-r},$$

由于 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 是(1)的解, 故 η 也是(1)的解, 比较 η 与 ξ, 知它们的后面 $n-r$ 个分量对应相等, 由于它们都满足方程组(3), 从而知它们的前面 r 个分量亦必对应相等(方程组(3)表

明任一解的前 r 个分量由后 $n-r$ 个分量唯一地决定), 因此 $\xi=\eta$, 即

$$\xi=\lambda_{r+1}\xi_1+\lambda_{r+2}\xi_2+\cdots+\lambda_n\xi_{n-r}.$$

这就证明了 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是解空间 S 的一个基, 从而知解空间 S 的维数是 $n-r$.

定理 6 n 齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=0$ 的全体解所构成的集合 S 是一个向量空间, 当系数矩阵的秩 $R(A_{m\times n})=r$ 时, 解空间 S 的维数为 $n-r$.

解空间 S 的基又称为方程组(1)的基础解系.

当 $R(A)=n$ 时, 方程组(1)只有零解, 因而没有基础解系(此时解空间 S 只含一个零向量, 为 0 维向量空间). 而当 $R(A)=r<n$ 时, 方程组(1)必有含 $n-r$ 个向量的基础解系. 设求得 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为方程组(1)的一个基础解系, 则(1)的解可表示为

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r},$$

其中 $k_1,\cdots,k_{n-r}$ 为任意实数. 上式称为方程组(1)的通解.此时, 解空间可表示为

$$S=\{x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}\mid k_1,\cdots,k_{n-r}\in R\}.$$

3. 例题讲解

例 14 次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=0, \\ 2x_1-5x_2+3x_3+2x_4=0, \\ 7x_1-7x_2+3x_3+x_4=0. \end{cases}$ 的基础解系与通解.

例 15 证明 $R(A^TA)=R(A)$.

证 设 A 为 $m\times n$ 矩阵, x 为 n 维列向量.

若 x 满足 $Ax=0,$ 则有 $A^T(Ax)=0,$ 即 $(A^TA)x=0;$

若 x 满足 $(A^TA)x=0,$ 则 $x^T(A^TA)x=0,$ 即 $(Ax)^T(Ax)=0,$ 从而推知 $Ax=0.$

综上可知方程组 $Ax=0$ 与 $(A^TA)x=0$ 同解, 因此 $R(A^TA)=R(A).$

下面讨论非齐次线性方程组.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \tag{4}$$

它也可写作向量方程 $Ax=b,$ (5)

向量方程(5)的解也就是方程组(4)的解向量，它具有

性质 3 设 $x=\eta_1$ 及 $x=\eta_2$ 都是(5)的解，则 $x=\eta_1-\eta_2$ 为对应的齐次线性方程组

$$Ax=0 \tag{6}$$

的解.

证 $A(\eta_1-\eta_2)=A\eta_1-A\eta_2=b-b=0$，即 $x=\eta_1-\eta_2$ 满足方程(6).

性质 6 设 $x=\eta$ 是方程(5)的解，$x=\xi$ 是方程(6)的解，则 $x=\eta+\xi$ 满足方程(5).

证 $A(\xi+\eta)=A\xi+A\eta=0+b=b$，即 $x=\eta+\xi$ 满足方程(5).

由性质 3 可知，若求得(5)的解 η^*，则(5)的任一解总可表示为 $x=\xi+\eta^*$，

其中 $x=\xi$ 为方程(6)的解，又若方程(6)的通解为 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$，则方程(5)

的任一解总可表示为 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\eta^*$.

而由性质 4 可知，对任何实数 $k_1,\cdots,k_{n-r}$，上式总是方程(5)的解. 于是方程(5)的通解为

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\eta^*, (k_1,\cdots,k_{n-r}\text{ 为任意实数}).$$

其中 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是方程(6)的基础解系.

例16 求解方程组 $\begin{cases} x_1-x_2-x_3+x_4=0, \\ x_1-x_2+x_3-3x_4=1, \\ x_1-x_2-2x_3+3x_4=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

4. 本节小结： 线性方程组的解结构

5. 作业： 129 页 17,3）20,24,25

第五章 相似矩阵及二次型

第一节 预备知识：向量的内积

一．**教学重点：** 向量的内积的定义与性质，向量的长度,规范正交基，正交矩阵

二．**教学难点：** 向量的规范正交基的求法

三．**教学目标：** 掌握内积的定义与性质，向量的规范正交基的求法

四．**教学过程：**

1.新课讲解

定义 1 设有n维向量 $$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},$$

令 $$[x,y]=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n,$$

$[x,y]$称为向量x与y的内积.

内积是向量的一种运算, 用矩阵记号表示, 当x与y都是列向量时, 有$[x,y]=x^Ty$.

内积具有下列性质(其中x,y,z为n维向量, λ为实数):

(i) $[x,y]=[y,x]$;

(ii) $[\lambda x,y]=\lambda[x,y]$;

(iii) $[x+y,z]=[x,y]+[y,z]$.

有解析几何中, 我们曾引进向量的数量积 $x\cdot y=|x||y|\cos\theta$, 且在直角坐标系中, 有

$(x_1,x_2,x_3)\cdot(y_1,y_2,y_3)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$. n维向量的内积是数量积的一种推广.

定义 2 令$\|x\|=\sqrt{[x,x]}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$, $\|x\|$称为n维向量x的长度(或范数).

向量的长度具有下述性质:

1. 非负性 当$x\neq 0$时, $\|x\|>0$; 当$x=0$时, $\|x\|=0$;

2. 齐次性 $\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$;

3. 三角不等式 $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$;

当$\|x\|=1$时, 称x为单位向量.

向量的内积满足 $$[x,y]^2\leq[x,x][y,y],$$

上式称为施瓦茨不等式, 由此可得$\left|\dfrac{[x,y]}{\|x\|\|y\|}\right|\leq 1$ (当$\|x\|\,\|y\|\neq 0$时), 于是有下面的定义:

$\|x\|\neq 0,\|y\|\neq 0$时, $\theta=\arccos\dfrac{[x,y]}{\|x\|\|y\|}$ 称为n维向量x与y的夹角.

当$[x,y]=0$时, 称向量x与y正交. 显然, 若$x=0$, 则x与任何向量都正交.

下面讨论正交向量组的性质. 所谓正交向量组, 是指一组两两正交的非零向量.

定理 1 若n维向量$a_1,a_2,\cdots,a_r$是一组两两正交的非零向量, 则$a_1,a_2,\cdots,a_r$线性无关.

证 设有$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$使 $\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2,+\cdots+\lambda_r a_r=0,$ 以a_1^T左乘上式两端, 得

$\lambda_1 a_1^T a_1=0,$ 因$a_1\neq 0,$ 故$a_1^T a_1=\|a_1\|^2\neq 0,$ 从而必有$\lambda_1=0.$

类似可证$\lambda_2=0,\cdots,\lambda_r=0.$ 于是向量组$a_1,a_2,\cdots,a_r$线性无关.

我们常采用正交向量组作向量空间的基, 称为向量空间的正交基. 例如n个两两正交的n维非零向量, 可构成向量空间R^n的一个正交基.

例 1 已知 3 维向量空间R^3中两个向量 $a_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ 正交, 试求一个非零向量a_3, 使a_1,a_2,a_3两两正交.

定义 3 设n维向量$e_1,e_2,\cdots,e_r$是向量空间$V(V\subset R^n)$的一个基, 如果$e_1,e_2,\cdots,e_r$两两正交, 且都是单位向量, 则称$e_1,e_2,\cdots,e_r$是V的一个规范正交基.

例如 $e_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\ -\frac{1}{\sqrt2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix},e_4=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \frac{1}{\sqrt2}\\ -\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$ 就是R^4的一个规范正交基.

若$e_1,e_2,\cdots,e_r$是V的一个规范正交基, 那么V中任一向量a应能由$e_1,e_2,\cdots,e_r$线性表示, 设表示式为 $a=\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\cdots+\lambda_r e_r.$ 为求其中的系数$\lambda_i(i=1,\cdots,r)$, 可用e_i^T左乘, 有 $e_i^T a=\lambda_i e_i^T e_i=\lambda_i$, 即$\lambda_i=e_i^T a=[a,e_i].$

设$a_1,a_2,\cdots,a_r$是向量空间V的一个基, 要求V的一个规范正交基. 这也就是要找一组两两正交的单位向量$e_1,e_2,\cdots,e_r$, 使$e_1,e_2,\cdots,e_r$与$a_1,a_2,\cdots,a_r$等价. 这样一个问题, 称为把$a_1,a_2,\cdots,a_r$这个基规范正交化.

我们可以用以下办法把$a_1,a_2,\cdots,a_r$规范正交化:

取 $b_1=a_1;$

$$b_2=a_2-\frac{[b_1,a_2]}{[b_1,b_1]}b_1;$$

$$b_r=a_r-\frac{[b_1,a_r]}{[b_1,b_1]}b_1-\frac{[b_2,a_r]}{[b_2,b_2]}b_2-\cdots-\frac{[b_{r-1},a_r]}{[b_{r-1},b_{r-1}]}b_{r-1}.$$

容易验证$b_1,b_2,\cdots,b_r$两两正交，且$b_1,b_2,\cdots,b_r$与$a_1,a_2,\cdots,a_r$等价.

然后只要把它们单位化，即取 $e_1=\frac{1}{\|b_1\|}b_1,e_2=\frac{1}{\|b_2\|}b_2,\cdots,e_r=\frac{1}{\|b_r\|}b_r$,

就得V的一个规范正交基.

上述从线性无关向量组$a_1,a_2,\cdots,a_r$导出正交向量组$b_1,b_2,\cdots,b_r$的过程称为施密特正交化过程.它不仅满足$b_1,b_2,\cdots,b_r$与$a_1,a_2,\cdots,a_r$等价，还满足：对任何$k(1\le k\le r)$, 向量组$b_1,b_2,\cdots,b_k$与$a_1,a_2,\cdots,a_k$等价.

例2　设$a_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix},a_3=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}$，试用施密特正交化过程把这组向量规范正交化.

例3　已知$a_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，求一组非零向量$a_2,a_3$, 使$a_1,a_2,a_3$两两正交.

定义 4　如果n阶矩阵A满足$A^TA=E$　(即$A^{-1}=A^T$)，那么称A为正交矩阵.

上式用A的列向量表示，即是 $\begin{pmatrix}a_1^T\\a_2^T\\\vdots\\a_n^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1, & a_2, & \cdots, & a_n\end{pmatrix}=E$，亦即

$(a_i^Ta_j)=(\delta_{ij})$，　这就是n^2个关系式

$$a_i^Ta_j=(\delta_{ij})=\begin{cases}1, & i=j,\\0, & i\ne j,\end{cases}\quad (i,j=1,2,\cdots,n).$$

这也说明：　方阵A为正交矩阵的充分必要条件是A的列向量都是单位向量，且两两正交.

考虑到$A^TA=E$与$AA^T=E$等价，所以上述结论对A的行向量亦成立.

由此可见，正交矩阵A的n个列(行)向量构成向量空间R^n的一个规范正交基.

例4 验证矩阵 $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ 是正交矩阵.

定义 5 若 P 为正交矩阵, 则线性变换 $y=Px$ 称为正交变换.

设 $y=Px$ 为正交变换, 则有 $\|y\|=\sqrt{y^T y}=\sqrt{x^T Px}=\sqrt{x^T x}=\|x\|$.

按 $\|x\|$ 表示向量的长度, 相当于线段的长度. $\|y\|=\|x\|$ 说明经正交变换线段长度保持不变，这是正交变换的优良特性.

2. 本节小结：内积的定义与性质, 向量的定义, 规范正交基, 正交矩阵

3. 作业：161 页 1.2),2.2)

第二节 方阵的特征值与特征向量

一．**教学重点**：方阵的特征值与特征值向量

二．**教学难点**：方阵的特征值与特征值向量

三．**教学目标**：掌握方阵的特征值与特征值向量的求法

四．**教学过程**：

1.新课讲解

定义 6 设 A 是 n 阶矩阵, 如果数 λ 和 n 维非零列向量 x 使关系式 $Ax=\lambda x$ (1) 成立, 那么这样的数 λ 称为方阵 A 的特征值, 非零向量 x 称为 A 的对应于特征值 λ 的特征向量.

(1) 式也可写成,
$$(A-\lambda E)x=0, \tag{2}$$
这是 n 个未知数 n 个方程的齐次线性方程组, 它有非零解的充分必要条件是系数行列式
$$|A-\lambda E|=0, \tag{3}$$

即
$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

上式是以 λ 为未知量的一元 n 次方程, 称为方阵 A 的特征方程. 其左端 $|A-\lambda E|$ 是 λ 的 n 次多项式, 记作 $f(\lambda)$, 称为方阵 A 的特征多项式. 显然, A 的特征值就是特征方程的解. 特征方程在复数范围内恒有解, 其个数为方程的次数(重根按重数计算), 因此, n 阶矩阵 A 有 n 个特征值.

设 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 的特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$, 由多项式的根与系数之间的关系, 不难证明

(i) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$;

(ii) $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$.

设 $\lambda=\lambda_i$ 为方阵 A 的一个特征值, 则由方程 $(A-\lambda_i E)x=0$ 可求得非零解 $x=p_i$, 那么 p_i 便是 A 的对应于特征值 λ_i 的特征向量. (若 λ_i 为实数, 则 p_i 可取实向量; 若 λ_i 为复数, 则 p_i 为复向量.)

例 5 求 $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

例 6 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

例 7 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & 1 & 3\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

例 8 设 λ 是方阵 A 的特征值, 证明 λ^2 是 A^2 的特征值.

证 因 λ 是 A 的特征值, 故有 $p\neq 0$ 使 $Ap=\lambda p$. 于是

$$A^2p=A(Ap)=A(\lambda p)=\lambda(Ap)=\lambda^2 p,\text{所以 }\lambda^2\text{ 是 }A^2\text{ 的特征值.}$$

定理 2 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是方阵 A 的 m 个特征值, $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 依次是与之对应的特征向量. 如果 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 各个相等, 则 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 线性无关.

证 设有常数 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 使 $x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_mp_m=0$. 则

$A(x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_mp_m)=0$, 即 $\lambda_1x_1p_1+\lambda_2x_2p_2+\cdots+\lambda_mx_mp_m=0$, 类推之, 有

$$\lambda_1^k x_1p_1+\lambda_2^k x_2p_2+\cdots+\lambda_m^k x_mp_m=0.(k=1,2,\cdots,m-1)$$

把上列各式合写成矩阵形式, 得

$$(x_1p_1,x_2p_2,\cdots,x_mp_m)\begin{pmatrix}1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{m-1}\\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{m-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \lambda_m & \cdots & \lambda_m^{m-1}\end{pmatrix}=(0,0,\cdots,0).$$

上式等号左端第二个矩阵的行列式为范德蒙德行列式, 当 λ_i 各不相等时该行列式不等于 0, 从而该矩阵可逆. 于是有 $(x_1p_1,x_2p_2,\cdots,x_mp_m)=(0,0,\cdots,0)$, 即 $x_jp_j=0(j=1,2,\cdots,m)$. 但 $p_j\neq 0$, 故 $x_j=0(j=1,2,\cdots,m)$. 所以向量组 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 线性无关.

2. 本节小结：方阵的特征值与特征值向量

3. 作业：162 页 4.2)3)

第三节 相似矩阵

一．教学重点：相似矩阵, 对角矩阵, 矩阵的对角化

二．教学难点：矩阵的对角化

三．教学目标：掌握矩阵对角化的方法

四．教学过程：

1.新课讲解

定义 7 设 A,B 都是 n 阶矩阵, 若有可逆矩阵 P, 使 $P^{-1}AP=B$, 则称 B 是 A 的相似矩阵, 或说矩阵 A 与 B 相似. 对 A 进行运算 $P^{-1}AP$ 称为对 A 进行相似变换, 可逆矩阵 P 称为把 A 变成 B 的相似变换矩阵.

定理 3 若 n 阶矩阵 A 与 B 相似, 则 A 与 B 的特征多项式相同, 从而 A 与 B 的特征值亦相同.

证 因 A 与 B 相似, 即有可逆矩阵 P, 使 $P^{-1}AP=B$. 故

$$|B-\lambda E|=|P^{-1}AP-P^{-1}(\lambda E)P|=|P^{-1}(A-\lambda E)P|=|P^{-1}||A-\lambda E||P|=|A-\lambda E|.$$

推论 若 n 阶矩阵 A 与对角矩阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$ 相似, 则 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 即是 A 的 n 个特征值.

证 因 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 即是 Λ 的 n 个特征值, 由定理 3 知 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 也就是 A 的 n 个特征值. 容易推证: 若 $A=PBP^{-1}$, 则 $A^k=PB^kP^{-1}$. A 的多项式 $\varphi(A)=P\varphi(B)P^{-1}$. 特别, 若有可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP=\Lambda$ 为对角矩阵, 则 $A^k=P\Lambda^kP^{-1},\varphi(A)=P\varphi(\Lambda)P^{-1}$. 而对于

对角矩阵Λ，有

$$\Lambda^k=\begin{pmatrix}\lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k\end{pmatrix},\varphi(A)=\begin{pmatrix}\varphi(\lambda_1) & & & \\ & \varphi(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi(\lambda_n)\end{pmatrix},$$

由此可方便地计算A的多项式$\varphi(A)$.

下面我们要讨论的主要问题是：对n阶矩阵A，寻找相似变换矩阵P，使$P^{-1}AP=\Lambda$为对角矩阵，这就称为把方阵A对角化.

假设已经找到可逆矩阵P，使$P^{-1}AP=\Lambda$为对角矩阵,我们来讨论P应满足什么关系.

把P用其列向量表示为$P=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$，由$P^{-1}AP=\Lambda$，得$AP=P\Lambda$，即

$$A(p_1,p_2,\cdots,p_n)=(p_1,p_2,\cdots,p_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}=(\lambda_1p_1,\lambda_2p_2,\cdots,\lambda_np_n),$$

于是有 $$Ap_i=\lambda_ip_i \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

可见λ_i是A的特征值，而P的列向量P_i就是A的对应于特征值λ_i的特征向量.

反之，由上节知A恰好有n个特征值，并可对应地求得n个特征向量，这n个特征向量即可构成矩阵P，使$AP=P\Lambda$.(因特征向量不是唯一的，所以矩阵P也不是唯一的，并且P可能是复矩阵.)

余下的问题是：P是否可逆？即$p_1,p_2,\cdots,p_n$是否线性无关？如果P可逆，那么便有

$P^{-1}AP=\Lambda$，即A与对角矩阵相似.

定理 4 n阶矩阵A与对角矩阵相似(即A能对角化)的充分必要条件是A有n个线性无关的特征向量.

推论 如果n阶矩阵A的n个特征值互不相等，则A与对角矩阵相似.

当A的特征方程有重根时，就不一定有n个线性无关的特征向量，从而不一定能对角化. 例如在例 6 中A的特征方程有重根，确定找不到 3 个线性无关的特征向量，因此例 6 中的A不能对角化；而在例 7 中A的特征方程也有重根，但却能找到3个线性无关的特征向量，因此例 7 中的A能对角化.

2. 本节小结：相似矩阵，对角矩阵，矩阵的对角化

3. 作业：162 页 6,7,8

第四节 对称矩阵的相似矩阵

一．教学重点：对称矩阵的特征值与特征值向量, 求正交矩阵, 使矩阵对角化

二．教学难点：求正交矩阵, 使矩阵对角化

三．教学目标：掌握求正交矩阵的方法

四．教学过程：

1.新课讲解

定理 5 对称矩阵的特征值为实数.

证 设复数λ为对称矩阵A的特征值, 复向量x为对应的特征向量, 即$Ax=\lambda x, x\neq 0$.

用$\overline{\lambda}$表示λ的共轭复数, $\overline{x}$表示x的共轭复向量, 则$A\overline{x}=\overline{A}\overline{x}=(\overline{Ax})=(\overline{\lambda x})=\overline{\lambda}\overline{x}$. 于是有 $\overline{x}^TAx=\overline{x}^T(Ax)=\overline{x}^T\lambda x=\lambda\overline{x}^Tx$, 及 $\overline{x}^TAx=(\overline{x}^TA^T)x=(A\overline{x})^Tx=(\overline{\lambda}\overline{x})^Tx=\overline{\lambda}\overline{x}^Tx$.

两式相减, 得$(\lambda-\overline{\lambda})\overline{x}^Tx=0$, 但因$x\neq 0$, 所以$(\overline{x}^Tx=\sum_{i=1}^{n}\overline{x}_ix_i=\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\neq 0$,

故$\lambda-\overline{\lambda}=0$, 即$\lambda=\overline{\lambda}$,这就说明$\lambda$是实数.

显然, 当特征值λ_i为实数时, 齐次线性方程组 $(A-\lambda_iE)x=0$是实系数方程组, 由$|A-\lambda_iE|=0$知必有实的基础解系, 所以对应的特征向量可以取实向量.

定理 6 设λ_1,λ_2是实对称矩阵A的两个特征值, p_1,p_2是对应的特征向量. 若$\lambda_1\neq\lambda_2$, 则p_1与p_2正交.

证$\lambda_1p_1=Ap_1,\lambda_2p_2=Ap_2,\lambda_1\neq\lambda_2$. 因$A$对称, 故

$\lambda_1p_1^T=(\lambda_1p_1)^T=(Ap_1)^T=p_1^TA^T=p_1^TA$, 于是$\lambda_1p_1^Tp_2=p_1^TAp_2=p_1^T(\lambda_2p_2)=\lambda_2p_1^Tp_2$,

即 $(\lambda_1-\lambda_2)p_1^Tp_2=0$. 但$\lambda_1\neq\lambda_2$,故$p_1^Tp_2=0$,即$p$与$p_2$正交.

定理 7 设A为n阶对称矩阵, λ是A的特征方程的r重根, 则矩阵$A-\lambda E$的秩$R(A-\lambda E)=n-r$,从而对应特征值λ恰有r个线性无关的特征向量.

定理 8 设A为n阶对称矩阵, 则必有正交矩阵P,使$P^{-1}AP=\Lambda$,其中Λ是以A的n个特征值为对角元素的对角矩阵.

证 设A的互不相等的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$,它们的重数依次为$r_1,r_2,\cdots,r_s$,

$(r_1+r_2+\cdots+r_s=n)$. 根据定理 5 及定理 7 知, 对应特征值λ_i $(i=1,2,\cdots,s)$,恰有r_i个线性无关的实特征向量, 把它们正交化并单位化, 即得r_i个单位正交的特征向量. 由

$r_1+r_2+\cdots+r_s=n$, 知这样的特征向量共可得 n 个.

按定理 6 知对应于不同特征值的特征向量正交, 故这 n 个单位特征向量两两正交. 于是以它们为列向量构成正交矩阵 P, 并有 $P^{-1}AP=P^{-1}P\Lambda=\Lambda$, 其中对角矩阵 Λ 的对角元素含 r_1 个 $\lambda_1,\cdots,r_s$ 个 λ_s, 恰是 A 的 n 个特征值.

例 9 设 $A=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&3&1\\0&1&3\end{pmatrix}$, 求一个正交矩阵, 使 $P^{-1}AP=\Lambda$ 为对角矩阵.

2. 本节小结：对称矩阵的特征值与特征值向量, 求正交矩阵, 使其对角化

3. 作业：162 页 9,10

第五节 二次型及其标准形

一．教学重点：二次型的定义, 可逆变换, 把二次型化为标准形

二．教学难点：把二次型化为标准形

三．教学目标：掌握把二次型化为标准形的过程

四．教学过程：

1. 引入

在解析几何中, 为了便于研究二次曲线 $ax^2+bxy+cy^2=1$ (4)

的几何性质, 我们可以选择适当的坐标旋转变换 $\begin{cases}x=x'\cos\theta-y'\sin\theta,\\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta,\end{cases}$ 把方程化为标准形 $mx'^2+ny'^2=1$. (4)式的左边是一个二次齐次多项式, 从代数学的观点看, 化标准形的过程就是通过变量的线性变换化简一个二次齐次多项式, 使它只含有平方项. 这样一个问题, 在许多理论问题或实际问题中常会遇到. 现在我们把这类问题一般化, 讨论 n 个变量的二次齐次多项式的化简问题.

2. 新课讲解

定义 8 含有 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{n-1,n}x_n \tag{5}$$

称为二次型.

取 $a_{ji}=a_{ij}$, 则 $2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i$, 于是(5)式可写成

$$f=a_{11}x_1^2+\cdots+a_{nn}^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n+\cdots$$

$$a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j. \tag{6}$$

对于二次型, 我们讨论的主要问题是: 寻找可逆的线性变换

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n, \end{cases} \tag{7}$$

使二次型只含平方项, 也就是用(7)代入(5),能使 $f = k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + \cdots + k_ny_n^2$. 这种只含平方项的二次型, 称为二次型的标准形.

当 a_{ij} 为复数时, f 称为复二次型; 当 a_{ij} 为实数时, f 称为实二次型. 这里,我们仅讨论实二次型, 所求的线性变换(7)也限于实系数范围.

由(6)式, 利用矩阵,二次型可表示为

$$f = x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) + x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n) + \cdots$$

$$+ x_n(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

$$= (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

记 $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

则二次型可记作 $$f = x^T Ax, \tag{8}$$

其中 A 为对称矩阵.

例如, 二次型 $f = x^2 - 3z^2 - 4xy + yz$ 用矩阵记号写出来, 就是

$$f = (x, y, z)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & \dfrac{1}{2} \\ 0 & \dfrac{1}{2} & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

任给一个二次型, 就唯一地确定一个对称矩阵; 反之, 任给一个对称矩阵, 也可唯一地确定一个二次型. 这样, 二次型与对称矩阵之间存在一一对应关系. 因此, 我们把对称矩阵 A 叫做二次型 f 的矩阵, 也把 f 叫做对称矩阵 A 的二次型. 对称矩阵 A 的秩就叫做二次型

f 的秩.

记 $C=(c_{ij})$，把可逆变换(7)记作 $x=Cy$,代入(8)，有

$$f=x^TAx=(Cy)^TACy=y^T(C^TAC)y.$$

定理 9 任给可逆矩阵 C，令 $B=C^TAC$,如果 A 为对称矩阵，则 B 亦为对称矩阵，且 $R(A)=R(B)$.

证 A 为对称矩阵，即有 $A^T=A$,于是 $B^T=(C^TAC)^T=C^TA^TC=C^TAC=B$,即 B 为对称矩阵.

再证 $R(A)=R(B)$.

因 $B=C^TAC$,故 $R(B)\le R(AC)\le R(A)$;

因 $A=(C^T)^{-1}BC^{-1}$，故 $R(A)\le R(BC^{-1})R(B)$. 于是 $R(A)=R(B)$.

这定理说明经可逆变换 $x=Cy$ 后，二次型 f 的矩阵由 A 变为 C^TAC,且二次型的秩不变.

要使二次型 f 经可逆变换 $x=Cy$ 变成标准形，这就是要使

$$y^TC^TACy=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\begin{pmatrix}k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix},$$

也就是要使 C^TAC 成为对角矩阵. 因此，我们的主要问题就是: 对于对称矩阵 A，寻找可逆矩阵 C,使 C^TAC 为对角矩阵.

定理 10 任给二次型 $f=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\,(a_{ij}=a_{ji})$，总有正交变换 $x=Py$,使 2 f 化为标准形

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 f 的矩阵 $A=(a_{ij})$ 的特征值.

例 10 一个正交变换 $x=Py$,把二次型

$$f=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4.$$化为标准形.

3. 本节小结：二次型的定义，可逆变换， 把二次型化为标准形的过程

4．作业：162 页 11.3),12.2)

第六节 用配方法化二次型成标准形

一．教学重点：拉格朗日配方法

二．教学难点：拉格朗日配方法

三．教学目标：掌握用拉格朗日配方法把二次型化为标准形

四．教学过程：

1. 新课讲解

用正交变换化二次型成标准形，具有几何形状的优点．如果不限于用正交变换，那么还可以有多种方法(对应有多个可逆的线性变换)把二次型化成标准形．这里只介绍拉格朗日配方法．

例 11 化二次型 $f = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$ 成标准形，并求所用的变换矩阵．

解 由于 f 中含变量 x_1 的平方项，故把含 x_1 的项归并起来，配方可得

$$
\begin{aligned}
f &= x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3 \\
&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_2x_3 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3 \\
&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2,
\end{aligned}
$$

上式右端除第一项外已不再含 x_1．继续配方，可得 $f = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + 2x_3)^2$．

令 $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_1 = x_2 + 2x_3, \\ y_3 = x_3, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + y_3 \\ x_2 = y_2 - 2y_3, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$

就把 f 化成标准形 $f = y_1^2 + y_2^2$，所用变换矩阵为 $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (|C| = 1 \neq 0)$.

例12 二次型 $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ 成标准形，并求所用的变换矩阵．

解 在 f 中不含平方项．由于含有 x_1x_2 乘积项，故令 $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$

代入可得 $f = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3$.

再配方，得 $f = 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2 - 2y_3)^2 + 6y_3^2$.

令 $\begin{cases} z_1 = y_1 - y_3 \\ z_2 = y_2 - 2y_3, \\ z_3 = y_3, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} y_1 = z_1 + z_3, \\ y_2 = z_2 + 2z_3, \\ y_3 = z_3, \end{cases}$ 即有 $f = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2$. 所用变换矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (|C| = -2 \neq 0).$$

一般地, 任何二次型都可用上面两例的方法找到可逆变换, 把二次型化成标准形.且由定理 9 知, 标准形中含有的项数就是二次型的秩.

2. 本节小结：拉格朗日配方法

3. 作业：

第七节 正定二次型

一．教学重点：惯性定理的内容, 正定二次型与负定二次型的定义和性质

二．教学难点：正定二次型与负定二次型的定义和性质

三．教学目标：掌握判断一个二次型是否为正定二次型的方法

四．教学过程：

1. 新课讲解

定理 11 (惯性定理) 设有实二次型 $f = x^T Ax$, 它的秩为 r, 有两个实的可逆变换 $x = Cy$ 与 $x = Pz$,

使
$$f = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_r y_r^2 \quad (k_i \neq 0),$$

及
$$f = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \cdots + \lambda_r z_r^2 \quad (\lambda_i \neq 0),$$

则 $k_1, \cdots, k_r$ 中正数的个数与 $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ 中正数的个数相等.

定义 9 设有实二次型 $f(x) = x^T Ax$, 如果对任何 $x \neq 0$, 都有 $f(x) > 0$ (显然 $f(0) = 0$), 则称 f 为正定二次型, 并称对称矩阵 A 是正定的; 如果对任何 $x \neq 0$ 都有 $f(x) < 0$, 则称 f 为负定二次型, 并称对称矩阵 A 是负定的.

定理 12 实二次型 $f = x^T Ax$ 为正定的充分必要条件是: 它的标准形的 n 个系数全为证.

证 设可逆变换 $x = Cy$ 使 $f(x) = f(Cy) = \sum_{i=1}^{n} k_i y_i^2$.

先证充分性. 设 $k_i > 0 (i = 1, \cdots, n)$. 任给 $x \neq 0$, 则 $y = C^{-1}x \neq 0$, 故 $f(x) = \sum_{i=1}^{n} k_i y_i^2 > 0$.

再证必要性.用反证法.假设有 $k_s \le 0$, 则当 $y = e_s$ (单位坐标向量)时, $f(Ce_s) = k_s \le 0$.

显然 $Ce_s \ne 0$, 这与 f 为正定相矛盾. 正交证明了 $k_i > 0(i = 1,\cdots,n)$.

推论 对称矩阵 A 为正定的充分必要条件是: A 的特征值全为正.

定理 13 (霍尔维茨定理) 对称矩阵 A 为正定的充分必要条件是: A 的各阶主子式都为正, 即

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \cdots, \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0;$$

对称矩阵 A 为负定的充分必要条件是: 奇数阶主子式为负, 而偶数阶主子式为正, 即

$$(-1)^r \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} > 0, (r = 1,2,\cdots,n).$$

例13 判断二次型 $f = -5x^2 - 6y^2 - 4z^2 + 4xy + 4xz$ 的正定性.

解 f 的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$,

$$a_{11} = -5 < 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 26 > 0, \quad |A| = -80 < 0,$$

根据定理 13 知 f 为负定.

设 $f(x, y)$ 是二维的正定二次型, 则 $f(x, y) = c$ ($c > 0$ 为常数)的图形是以原点为中心的椭圆. 当把 c 看作任意常数时则是一族椭圆. 这族椭圆随着 $c \to 0$ 而收缩到原点. 当 f 为三维正定二次型时, $f(x, y, z) = c(c > 0)$ 的图形是一族椭球.

2. 本节小结：正定二次型与负定二次型的定义和性质.

3. 作业：163 页 14,15,16