

泛函分析讲义

王才士

西北师范大学数学与统计学院

泛函分析(Functional Analysis)是现代数学的一个重要分支, 属于分析数学范畴. 这一学科的主要奠基人有:

- D. Hilbert (1862–1943) 德国数学家, 创立了Hilbert空间理论. 他在第二届国际数学家大会(巴黎, 1900年)上的演讲对二十世纪数学的发展产生了深远的影响.
- S. Banach (1892–1945) 波兰数学家, 创立了Banach空间理论. 著有“Théorie des opérations linéaires”一书, 系第一部关于泛函分析一般理论的专著.
- J. von Neumann (1903–1957) 美籍匈牙利数学家(犹太人), 创立了von Neumann算子代数理论. 他也被誉为“现代计算机科学之父”.

作为现代数学的一个分支, 泛函分析起源于经典数学物理中的一些变分问题和边值问题, 概括了经典数学分析和函数论中的某些重要概念、问题和成果, 同时又受到量子物理学、现代工程技术和现代力学等学科的有力刺激.

- **研究对象**: 来自于分析数学、现代物理和现代工程技术等领域的重要问题.
- **基本框架**: 具有一定线性结构和拓扑结构的无穷维空间.
- **主要特点**: 综合运用分析的、代数的和几何的观点和方法.
- **意义与用途**: 泛函分析的概念和方法已渗透到现代纯粹与应用数学、理论物理以及现代工程技术理论的许多分支.

泛函分析理论大体分为线性泛函分析和非线性泛函分析两大部分. 比起非线性泛函分析来说, 线性泛函分析要成熟得多也更加基本. 其原因在于人们认识数学物理中的许多问题时大都对其先作一次近似, 即所谓“线性化”; 而线性问题总是比非线性问题容易处理得多, 因而迄今所获得的成果也就丰富的多.

作为大学本科阶段的一门必修课, 本课程主要讲解线性泛函分析的基本内容:

- 度量空间和赋范线性空间;
- 有界线性算子和连续线性泛函;
- 内积空间和Hilbert空间;
- Banach空间中的基本定理.

目前, 国内出版的泛函分析教材很多, 泛函分析的专著也不少. 此外, 国内还可以看到许多国外出版的英文泛函分析教材和专著.

- 夏道行、吴卓人、严绍宗、舒五昌, 实变函数论与泛函分析(下册), 高等教育出版社, 1984.
- 张恭庆、林源渠, 泛函分析讲义(上册), 北京大学出版社, 1987.
- P.D. Lax, Functional Analysis, New York: John Wiley & Sons, 2002.
- J.B. Conway, A Course in Functional Analysis(2nd Edition), New York: Springer-Verlag, 1990.