

泛函分析讲义

王才士

2011年5月

Chap 9 内积空间和Hilbert 空间

§5 自伴算子、酉算子和正常算子

本节, 我们考察几类特殊的有界算子. 它们分别对应于有限维情形的Hermite 矩阵, 酉矩阵等. 首先考虑所谓自伴算子.

定义1

设 H 是一个Hilbert 空间, $T: H \mapsto H$ 是一个有界线性算子. 若 $T = T^*$, 则称 T 是**自伴算子**, 简称 T 自伴.

♠ 文献中, 自伴算子也称为**自共轭算子**(self-adjoint operator).

♠ 根据上述定义和共轭算子的定义, 我们可以得到如下自伴性的等价表述.

自伴性等价表述

设 H 是一个Hilbert 空间. 则有界线性算子 $T: H \mapsto H$ 自伴的充分必要条件是

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle, \quad x, y \in H. \quad (1)$$

- 满足条件(1)的算子称为**对称算子**.
- 上述结论表明, 在有界算子的情形自伴性与对称性是一致的.
- 在无界算子的情形, 自伴性与对称性是不一致.

引理1

设 H 是一个复内积空间, $T: H \mapsto H$ 是一个有界线性算子. 则 $T = 0$ 的充分必要条件是

$$\langle Tx, x \rangle = 0, \quad x \in H. \quad (2)$$

下一个定理给出了复Hilbert 空间情形下有界算子自伴性的另一个等价描述.

定理1

设 H 是一个复Hilbert 空间, $T: H \mapsto H$ 是一个有界线性算子. 则 T 自伴的充分必要条件是: 对一切 $x \in H$, $\langle Tx, x \rangle$ 是实数.

下一个定理表明, 自伴算子集合对代数运算具有一定的封闭性.

定理2

设 H 是一个Hilbert 空间, T_1, T_2 是 H 上的两个自伴算子. 则:

- (1) $T_1 + T_2$ 是自伴算子;
- (2) 对任意实数 α , 数乘 αT_1 也是自伴算子;
- (3) $T_1 T_2$ 自伴的充要条件是 $T_1 T_2 = T_2 T_1$, 即 T_1 与 T_2 可交换.

下一个定理说明, 自伴算子集合对极限运算也是封闭的.

定理3

设 H 是一个Hilbert 空间, $\{T_n\}$ 是 H 上的一列自伴算子. 若 $\{T_n\}$ 依算子范数收敛于有界算子 T , 则 T 也是自伴算子.

下面考虑所谓酉算子, 此类算子对应于有限维情形的酉矩阵.

定义2

设 H 是一个Hilbert 空间, $T: H \mapsto H$ 是一个有界线性算子. 若 T 可逆(即为双射)且 $T^{-1} = T^*$, 则称 T 是酉算子.

♠ 在 T 是有界算子的条件下, T 是酉算子 $\Leftrightarrow T$ 是满射且保持内积.

下一个定理给出了酉算子的运算性质.

定理3

设 H 是一个Hilbert 空间, 则下列命题成立:

- ① 若 U 是 H 上的酉算子, 则 U 保持范数;
- ② 若 U 是 H 上的酉算子且 $H \neq \{0\}$, 则 $\|U\| = 1$;
- ③ 若 U 是 H 上的酉算子, 则 U^{-1} 也是酉算子;
- ④ 若 U, V 都是 H 上的酉算子, 则 UV 也是酉算子;
- ⑤ 若 $\{U_n\}$ 是 H 上的一列酉算子, 且 $\{U_n\}$ 依算子范数收敛于有界算子 W , 则 W 也是酉算子.

酉算子群

设 H 是一个Hilbert 空间, 以 $\mathcal{U}$ 表示 H 上的全体酉算子构成的集合. 则 $\mathcal{U}$ 关于算子乘法构成一个群, 其单位元为恒等算子(即单位算子).

该群称为Hilbert 空间 H 的酉算子群.

投影算子在酉算子作用下不变

设 H 是一个Hilbert 空间, U 为 H 上的酉算子. 则对 H 上的每个投影算子 P , 算子 UPU^{-1} 也是投影算子.

酉算子是保持内积的算子, 从而也是保范算子. 但是保持内积的算子未必是酉算子.

例1

考虑Hilbert 空间 l^2 . 定义算子 $T: l^2 \mapsto l^2$ 如下:

$$T(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots) = (0, \xi_1, \xi_2, \cdots),$$

$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots) \in l^2$. 易见 T 是 l^2 到其自身的有界线性算子. 不难验证 T 还是一个保持内积的算子.

另一方面, 我们看到 T 的像是 l^2 中第一个坐标为 0 的向量的全体. 因此, T 不是满射. 这说明 T 不是酉算子.

◇ 上述算子 T 称为 l^2 中的**单向移位算子**或**推移算子**.

定理5

设 H 是一个Hilbert 空间, $T: H \mapsto H$ 是一个有界线性算子. 则 T 是酉算子 $\Leftrightarrow T$ 是满射且保持范数.

最后, 我们介绍所谓正常算子, 这也是一类重要的算子.

定义3

设 H 是一个Hilbert 空间, $T: H \mapsto H$ 是一个有界线性算子. 若 $TT^* = T^*T$, 则称 T 是 H 上的**正常算子** (normal operator)

笛卡尔分解

设 T 是复Hilbert 空间 H 上的一个有界线性算子. 定义

$$A = (T + T^*)/2, \quad B = (T - T^*)/2i. \quad (3)$$

容易验证算子 A 和 B 都是自伴算子, 并且 $T = A + iB$.

称 $T = A + iB$ 为笛卡尔分解, 其中 A 和 B 分别称为 T 的实部和虚部.

定理6

设 T 是复Hilbert 空间 H 上的一个有界线性算子, $T = A + iB$ 为其笛卡尔分解. 则 T 为正常算子的充分必要条件是 A 与 B 可交换, 即 $AB = BA$.

定理7

设 T 是复Hilbert 空间 H 上的一个有界线性算子. 则 T 为正常算子的充分必要条件是:

$$\|T^*x\| = \|Tx\|, \quad x \in H. \quad (4)$$