泛函分析讲义

王才士

2011年5月

§4 Hilbert 空间上的连续线性泛函

众所周知, 欧式空间上的线性泛函可以以其中的向量来表示. 下面, 我们将会看到无穷维情形下也有类似的表示.

Hilbert 空间中向量定义的泛函

设 H 是Hilbert 空间, H^* 是其共轭空间. 设 $z \in H$, 定义泛函 f_z 如下:

$$f_z(x) = \langle x, z \rangle, \quad x \in H. \tag{1}$$

容易发现 f_z 是 H 上的连续线性泛函, 即 $f_z \in H^*$, 并且 $\|f_z\| = \|z\|$.

定理1 (Riesz定理)

设 H 是Hilbert 空间, f是 H上的连续线性泛函, 则存在唯一的向量 $z \in H$, 使得

$$f(x) = \langle x, z \rangle, \quad x \in H. \tag{2}$$

并且 $\|f\| = \|z\|$.

♠ 根据Riesz定理, 对每个 $f \in H^*$, 有 $z \in H$ 使得 $f = f_z$. 这说明Hilbert 空间上的连续线性泛函都是向量定义的泛函.

共轭同构

设 X 和 Y 是数域 $\mathbf{K}$ 上的两个Banach 空间. 若存在映射 $T\colon X \mapsto Y$ 满足: (1) T 是双射; (2) T 保持范数; (3) T 具有共轭线性, 即

$$T(\alpha u + \beta v) = \bar{\alpha} Tu + \bar{\beta} Tv, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{K}, \ u, v \in X; \tag{3}$$

则称 X 与 Y 共轭同构, 并称 $T\colon X \mapsto Y$ 是共轭同构映射.

♠ 称 $T\colon X \mapsto Y$ 保持范数是指 $\|Tu\| = \|u\|$.

♠ 若Banach 空间 X 与 Y 共轭同构, 则文献中常将它们视为同一, 不加区分.

推论1

设 H 是数域 $\mathbf{K}$ 上的Hilbert 空间, H^* 是其共轭空间. 定义映射 $T: H \mapsto H^*$ 如下

$$Tz = f_z, \quad z \in H. \tag{4}$$

则 $T: H \mapsto H^*$ 是一个共轭同构映射, 从而 H 与 H^* 共轭同构.

♠ 由于共轭同构的Banach 空间可视为同一, 因此 $H = H^*$, 即 H 是自共轭的.

定理2

设 X 和 Y 是两个Hilbert 空间, $A \in \mathcal{B}(X \mapsto Y)$, 则存在唯一 $A^* \in \mathcal{B}(Y \mapsto X)$ 满足

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle, \quad x \in X, y \in Y \tag{5}$$

并且 $\|A^*\| = \|A\|$.

定义1

设 X 和 Y 是两个Hilbert 空间, $A \in \mathcal{B}(X \mapsto Y)$. 则由定理2确定的算子 $A^* \in \mathcal{B}(Y \mapsto X)$ 称为 A 的Hilbert 共轭算子, 简称共轭算子.

算子共轭运算的性质

设 X 和 Y 是两个Hilbert 空间, A, $B \in \mathcal{B}(X \mapsto Y)$, α 是数, 则成立:

- $(A+B)^* = A^* + B^*$;
- $(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*$;
- $(A^*)^* = A$;
- $\|AA^*\| = \|A^*A\| = \|A\|^2$;
- 当 $X = Y$ 时, 有 $(AB)^* = B^*A^*$.