泛函分析讲义

王才士

2011年4月

§2 投影定理

设 X 是一个度量空间, $M \subset X$ 是非空子集, $x \in X$ 是一点, 定义

$$d(x, M) = \inf_{z \in M} d(x, z), \tag{1}$$

称之为点 x 到点集 M 的距离. 当 X 是赋范线性空间时, x 到点集 M 的距离为

$$d(x, M) = \inf_{z \in M} \|x - z\|. \tag{2}$$

问题: 是否存在点 $z \in M$ 使得 $d(x, M) = \|x - z\|$? 如果存在这样的点, 那末这样的点是否唯一?

线性空间中的凸集

设 X 是一个线性空间, $M \subset X$ 是一个非空子集. 若对于任意两个向量 $x, y \in M$ 都有

$$\{\theta x + (1-\theta)y \mid 0 \le \theta \le 1\} \subset M, \tag{3}$$

则称 M 为凸集. 其中 $\theta x + (1-\theta)y$ 常称为向量 x 和 y 的凸组合.

定理1 (极小化向量定理)

设 H 是一个Hilbert 空间, $M \subset H$ 是一个非空的闭、凸子集. 则对每个 $x \in H$, 存在唯一的 $z \in M$ 满足

$$d(x, M) = \|x - z\|. \tag{4}$$

其中 $\|\cdot\|$ 为内积的生成范数.

♠ 在极小化向量定理中, 若将原条件改换为"H 是一个内积空间, $M \subset H$ 是一个非空凸子集且关于 H 中的内积导出的距离完备", 则结论仍然成立. 参见教材第242页定理1.

证明

由 $d(x,M)$ 的定义可知, 存在向量序列 $\{z_n\} \subset M$ 满足

$$d(x,M) \leq \|x - z_n\| < d(x,M) + \frac{1}{n}, \quad n \geq 1. \tag{5}$$

下证 $\{z_n\}$ 是Cauchy 序列. 对任意 $m, n \geq 1$, 使用平行四边形公式得

$$\begin{aligned} &2(\|x - z_n\|^2 + \|x - z_m\|^2) \\ &= \|(x - z_n) + (x - z_m)\|^2 + \|(x - z_n) - (x - z_m)\|^2. \end{aligned}$$

证明(续)

由此并使用(5)式可得

$$\begin{aligned}\|(z_m - z_n)\|^2 &= 2(\|x - z_n\|^2 + \|x - z_m\|^2) - 4\|x - (z_n + z_m)/2\|^2 \\ &\leq 2(\|x - z_n\|^2 + \|x - z_m\|^2) - 4[d(x, M)]^2 \\ &\to 0 \quad (m,\, n \to \infty).\end{aligned}$$

从而证明了 $\{z_n\}$ 是Cauchy 序列. 因 H 是Hilbert空间, 故 $\{z_n\}$ 收敛. 若记 $z = \lim_{n\to\infty} z_n$, 则由 M 的闭性知 $z \in M$. 在不等式(5)的各端取极限, 同时使用范数的连续性便得

$$\|x - z\| = d(x, M).$$

下证这样的 z 还是唯一的.

证明(续)

其实, 若还有 z' 使得 $\|x-z'\|=d(x,M)$, 则使用平行四边形公式得

$$\begin{aligned}4[d(x,M)]^2 &= 2(\|x-z\|^2+\|x-z'\|^2)\\ &= 4\|x-(z+z')/2\|^2+\|z'-z\|^2\\ &\geq 4[d(x,M)]^2+\|z'-z\|^2.\end{aligned}$$

可见 $\|z'-z\|^2=0$, 从而 $z'=z$.

♠ 在定理1的证明中, 平行四边形公式被反复用到. 足见该定理强烈地依赖于内积空间的优良几何性质.

推论1

设 H 是一个Hilbert 空间, $M \subset H$ 是一个闭子空间. 则对每个 $x \in H$, 存在唯一的 $z \in M$ 满足

$$d(x, M) = \|x - z\|. \tag{6}$$

其中 $\|\cdot\|$ 为内积的生成范数.

定义1

设 H 是一个内积空间, $x, y \in H$ 是两个向量, $M \subset H$ 是一个子集.

(1) 若 $\langle x, y\rangle = 0$, 则称向量 x 与 y 正交, 记为 $x \perp y$.

(2) 若 x 与 M 中的每一个向量都正交, 则称 x 与 M 正交, 记为 $x \perp M$.

说明

(1) 设 H 是内积空间, $M_1, M_2 \subset H$ 是两个子集. 则可类似定义 $M_1 \perp M_2$.

(2) 若x, y 是内积空间 H 中的两个向量, 且 $x \perp y$, 则有如下勾股公式

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2. \tag{7}$$

定理2

设 H 是内积空间, $M \subset H$ 是一个线性子空间, $x \in H$ 是一个向量. 若有 $z \in M$ 满足

$$\|x-z\| = d(x, M), \tag{8}$$

则 $x-z \perp M$, 即 $x-z$ 与 M 正交.

证明

设有 $z \in M$ 满足(8), 往证 $x - z \perp M$. 任取 $u \in M$. 考虑如下实二次函数:

$$f(t) = \|(x-z)+tu)\|^2 = \|x-z\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x-z, u\rangle t + \|u\|^2 t^2. \quad (9)$$

易见 $f(0) = \|x-z\|^2 = [d(x,M)]^2$. 又因 $z - tu \in M$, 所以

$$f(t) = \|(x-z)+tu)\|^2 = \|x-(z-tu)\|^2 \geq [d(x,M)]^2 = f(0).$$

这说明 $f(t)$ 在 $t = 0$ 处取得最小值, 从而 $f'(0) = 0$, 由此得

$$\mathrm{Re}\langle x-z, u\rangle = 0. \quad (10)$$

当 H 是实内积空间时, 上式即为 $\langle x-z, u\rangle = 0$, 即 $x - z \perp u$.

证明(续)

当 H 是复内积空间时, 由于 $iu \in M$, 所以使用同样方法可以得到

$$\mathrm{Im}\langle x-z, u\rangle = \mathrm{Re}\langle x-z, iu\rangle = 0. \tag{11}$$

将此式与(10)结合便得 $\langle x-z, u\rangle = 0$, 即 $x-z \perp u$.

总之 $x-z \perp u$. 但其中 $u \in M$ 是任意选取的, 因此 $x-z \perp M$.

定义2

设 H 是内积空间, $D \subset H$ 非空. 定义

$$D^{\perp} = \{\, x \in H \mid x \perp D \,\}. \tag{12}$$

称之为 D 在 H 中的正交补.

正交补的简单性质

设 H 是一个内积空间, $D \subset H$ 是一个非空子集. 则:

(1) $D^{\perp}$ 是 H 的闭子空间;

(2) $(\operatorname{span} D)^{\perp} = D^{\perp}$, 即 D 张成的线性子空间与 D 有相同的正交补.

定理3

设 H 是Hilbert空间, $M \subset H$ 是一个闭子空间. 则对每个 $x \in H$, 都有唯一的一对$u \in M$, $v \in M^{\perp}$ 满足

$$x = u + v. \tag{13}$$

即 $H = M \oplus M^{\perp} \overset{d}{=} \{u + v \mid u \in M, v \in M^{\perp}\}$.

证明

根据推论1和定理2, 存在 $u \in M$ 使得 $x-u \perp M$. 令 $v = x-u$, 则 $v \in M^{\perp}$ 且 $x = u + v$.

若还有$u' \in M$, $v' \in M^{\perp}$ 满足 $x = u' + v'$, 则 $u - u' = v' - v$, 从而

$$\langle u - u', u - u' \rangle = \langle u - u', v' - v \rangle = 0,$$

这意味着 $u = u'$, $v = v'$.

正交投影

设 H 是Hilbert空间, $M \subset H$ 是一个闭子空间, $x \in H$, 则存在唯一的一个向量 $u \in M$ 满足

$$x - u \perp M.$$

称向量 u 为向量 x 在闭子空间 M 中的正交投影, 简称投影.

投影算子

设 H 是Hilbert空间, $M \subset H$ 是一个闭子空间. 定义算子 $P: H \mapsto H$ 如下:

$$Px = u \ (u \text{ 为 } x \text{ 在 } M \text{ 中的投影}), \quad x \in H. \tag{14}$$

则 P 是 H 上的有界线性算子, 称为到 M 的正交投影算子, 简称投影算子. 易见, 投影算子 P 具有下列性质:

(1) $Pu = u, \forall\, u \in M$; $Pv = 0, \forall\, v \in M^{\perp}$;

(2) $P^2 = P$. 此处 $P^2 = PP$.

定理4

设 H 是Hilbert空间, $M \subset H$ 是一个闭子空间. 记 $M^{\perp\perp} = (M^{\perp})^{\perp}$, 则

$$M^{\perp\perp} = M. \tag{15}$$

定理5

设 H 是Hilbert空间, $D \subset H$ 是一个非空子集. $\operatorname{span} D$ 在 H 中稠密的充分必要条件是 $D^{\perp} = \{0\}$.