12 内积空间的基本概念

在前一章, 我们介绍了赋范线性空间的概念. 在一般赋范线性空间中, 我们可以谈论向量的长度(即范数), 但无法谈论向量之间的夹角, 因为缺乏描述夹角的几何结构.

回想在二维和三维欧式空间中, 向量之间的夹角可通过夹角的余玄函数值来描述, 而夹角的余玄函数值则由空间中的所谓内积决定, 同时这种内积也决定向量的长度. 总之, 二维和三维欧式空间具有较好的几何结构, 而这种几何结构完全由一个被称为内积的二变元泛函所决定.

本章, 我们将看到在无穷维空间中也可以引入内积, 从而可讨论相应的几何结构. 以下, $\mathbb{K}$ 仍将表示实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$.

定义1 设 X 是数域 $\mathbb{K}$ 上的一个线性空间, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 X 上的一个二变元 $\mathbb{K}$-值泛函. 若 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 满足:

(1) $\langle x,x\rangle \geq 0, \forall\, x\in X$ 且 $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x=0$;

(2) $\langle \alpha x+\beta y, z\rangle = \alpha\langle x,z\rangle + \beta\langle y,z\rangle, \forall\, \alpha,\, \beta\in\mathbb{K}, \forall\, x,\, y,\, z\in X$;

(3) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}, \forall\, x,\, y\in X$;

则称 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为 X 上的一个内积, 并称 $\big(X,\langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ 为数域 $\mathbb{K}$ 上的内积空间.

容易看出, 上述定义中的条件(2)与条件(3)一起蕴涵着如下两条性质:

(4) $\langle x,\alpha y+\beta z\rangle = \overline{\alpha}\langle x,y\rangle + \overline{\beta}\langle x,z\rangle, \forall\, \alpha,\, \beta\in\mathbb{K}, \forall\, x,\, y,\, z\in X$.

(5) $\langle x,0\rangle = \langle 0,y\rangle = 0, \forall\, x,\, y\in X$.

注 在定义1中, 条件(1)称为内积的正定性; 条件(2)与性质(4)合称为内积的一个半线性或共轭双线性; 而条件(3)多称为内积的共轭对称性或Hermite性.

实数域 $\mathbb{R}$ 上的内积空间简称为实内积空间, 此时的内积所满足的条件(3)和(4)分别化为下列两个条件:

(3') $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle, \forall\, x,\, y\in X$;

(4') $\langle x,\alpha y+\beta z\rangle = \alpha\langle x,y\rangle + \beta\langle x,z\rangle, \forall\, \alpha,\, \beta\in\mathbb{R}, \forall\, x,\, y,\, z\in X$.

其中条件(4')与性质(2)合称为内积的双线性, 而条件(3')称为内积的对称性.

引理1 (Schwarz不等式) 设 X 是数域 $\mathbb{K}$ 上的一个内积空间, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为其内积. 则对任意两个向量 $x,\, y\in X$, 成立不等式

$$|\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle. \tag{12.1}$$

其中等号成立当且仅当 x 与 y 线性相关.

证明 设 $x, y \in X$. 考虑下列实函数

$$f(t) = \langle x + ty, x + ty \rangle, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{12.2}$$

由内积的性质可知 $f(t)$ 是实轴上的非负函数, 并且还是一个二次函数

$$f(t) = \langle x, x \rangle + 2\mathrm{Re}\langle x, y \rangle t + \langle y, y \rangle t^2.$$

因此, 一元二次方程 $\langle x, x \rangle + 2\mathrm{Re}\langle x, y \rangle t + \langle y, y \rangle t^2 = 0$ 至多有一个实根, 从而其判别式非正, 即 $(2\mathrm{Re}\langle x, y \rangle)^2 \le 4\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$. 化简得

$$(\mathrm{Re}\langle x, y \rangle)^2 \le \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle. \tag{12.3}$$

另一方面, 我们有 $\langle x, y \rangle$ 的指数表示 $\langle x, y \rangle = |\langle x, y \rangle| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 其中 θ 为某个实数(幅角). 于是

$$|\langle x, y \rangle| = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \langle x, y \rangle = \langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} x, y \rangle = \mathrm{Re}\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} x, y \rangle).$$

由此并使用不等式(12.3)得

$$|\langle x, y \rangle|^2 = \left[\mathrm{Re}\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} x, y \rangle\right]^2 \le \langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} x, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} x \rangle \langle y, y \rangle = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle.$$

下证引理的第二部分. 当 x 与 y 线性相关时, 容易验证下式成立

$$|\langle x, y \rangle|^2 = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle. \tag{12.4}$$

反之, 若(12.4)式成立, 则 x 与 y 必线性相关. 其实, 当 $y = 0$ 时, x 与 y 显然线性相关; 当 $y \ne 0$ 时, 若取 $\lambda = \langle x, y \rangle / \langle y, y \rangle$, 则经计算得

$$\langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} = \langle x, x \rangle - \frac{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle}{\langle y, y \rangle} = 0,$$

从而 $x - \lambda y = 0$, 即 x 与 y 线性相关. 证毕.

以下我们假定 X 是数域 $\mathbb{K}$ 上的一个给定的内积空间, 其内积为 $\langle \cdot, \cdot \rangle$. 考虑下列函数

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad x \in X. \tag{12.5}$$

显然 $\|\cdot\|$ 具有正定性. 设 $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in X$, 则

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle} = |\lambda| \, \|x\|.$$

这说明 $\|\cdot\|$ 具有正齐次性. 此外, 若 $x, y \in X$, 则由Schwarz 不等式可得

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2,$$

此式意味着 $\|\cdot\|$ 满足三角不等式. 因此 $\|\cdot\|$ 是 X 上的一个范数, 称为内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的生成范数.

上述讨论表明内积空间关于其内积的生成范数构成一个赋范线性空间, 因而内积空间是一类特殊的赋范线性空间. 值得指出的是内积空间的内积作为二变元泛函是连续的, 即当 $x_n \to x$, $y_n \to y$ 时, 有 $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$.

容易验证, 若 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是线性空间 X 上的一个内积, 则其生成范数 $\|\cdot\|$ 满足如下平行四边形公式

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big), \quad x, y \in X. \tag{12.6}$$

反之, 若线性空间 X 上的范数 $\|\cdot\|$ 满足上述平行四边形公式, 则 $\|\cdot\|$ 一定为某个内积的生成范数. 因此, 平行四边形公式是内积空间区别于一般赋范线性空间的关键特征.

注 设 X 是一个内积空间. 若 X 关于其内积的生成范数构成一个Banach 空间, 则称 X 是一个Hilbert 空间.

例1 在 $L^2[a,b]$ 上定义二元泛函 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 如下

$$\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt, \quad x, y \in L^2[a,b]. \tag{12.7}$$

容易验证 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是内积, 从而 $L^2[a,b]$ 关于 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 构成一个内积空间. 此外, 上述内积的生成范数恰为前面所定义过的L^2-范数(即 $p=2$ 时的L^p-范数):

$$\|x\|_2 = \Big(\int_a^b |x(t)|^2 dt\Big)^{1/2}.$$

因此 $L^2[a,b]$ 是一个Hilbert 空间.

例2 考虑 l^2 上的如下二元泛函

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \overline{\eta_k}, \quad x, y \in l^2. \tag{12.8}$$

其中 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k, \cdots)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_k, \cdots)$. 容易验证 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是一个内积, 从而 l^2 关于 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 构成一个内积空间. 此外, 上述内积的生成范数恰为前面所定义过的l^2-范数:

$$\|x\| = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2\Big)^{1/2}.$$

因此 l^2 也是一个Hilbert 空间.

例3 当 $p \neq 2$ 时, l^p 空间的范数非内积生成. 其实若取

$$x = (1, 1, 0, \cdots), \quad y = (1, -1, 0, \cdots),$$

则 $x,\, y \in l^p$ 且 $\|x\| = \|y\| = 2^{1/p}$, $\|x+y\| = \|x-y\| = 2$. 从而

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 8 \neq 4 \times 2^{2/p} = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

这说明, 当 $p \neq 2$ 时, l^p 的范数不是内积生成的. 在此意义下, 人们也说 l^p 不是内积空间.

例4 $C[a,b]$ 中的最大模范数非内积生成. 其实, 若取

$$x(t) \equiv 1, \quad y(t) = (t-a)/(b-a),$$

则 $x,\, y \in C[a,b]$ 且 $\|x\| = \|y\| = 1$. 另一方面因

$$x(t) + y(t) = 1 + \frac{t-a}{b-a}, \quad x(t) - y(t) = 1 - \frac{t-a}{b-a},$$

所以 $\|x+y\| = 2$, $\|x-y\| = 1$, 从而

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 5 \neq 4 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

这说明最大模范数不满足平行四边形公式, 从而不是内积生成的. 换言之 $C[a,b]$ 关于最大模范数不是内积空间.

下面的两个公式称为极化恒等式, 它表明内积也可用它的生成范数表示. 设 X 是一个实内积空间, 则其内积和生成范数满足

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\Big), \quad x, y \in X. \tag{12.9}$$

若 X 是一个复内积空间, 则其内积和生成范数满足

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\Big), \quad x, y \in X. \tag{12.10}$$

注 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是一个赋范线性空间, 其范数满足平行四边形公式. 若 X 为实赋范线性空间, 则按(12.9)式定义的 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是内积且其生成范数恰为 $\|\cdot\|$; 若 X 为复赋范线性空间, 则按(12.10)式定义的 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是内积且其生成范数恰为 $\|\cdot\|$.