11 广义函数大意

设想在一根无限长的细棒上有一质量分布, 只集中在 $x=0$ 处, 总质量为一个单位. 假定分布密度为 $\delta(x)$, 则应有

$$\delta(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0;\\ \infty, & x=0,\end{cases}$$

并且 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1$. 可是, 根据Lebesgue 积分理论, 这样的 $\delta(x)$ 难以作为函数来理解, 更难以理解对其进行求导数运算. 事实上, 如果将 $\delta(x)$ 作为普通函数来理解, 则 $\delta(x)=0$ a.e., 从而 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=0$, 即总质量为 0. 矛盾!

然而, 在工程技术中象 $\delta(x)$ 这样的对象却十分常见. 例如, 在无线电工程中常考虑所谓脉冲现象, 即在极短的时间内爆发出一个单位能量的信号. 这与上述质量分布情形十分相似, 工程技术文献中就用 $\delta(x)$ 来表示.

如何严格而合理地理解和定义 $\delta(x)$ 这样的对象曾经是长期摆在数学家们面前的重要理论问题. 上世纪五十年代, 在前人工作的基础上Schwartz建立了广义函数理论. 在此理论中, 象 $\delta(x)$ 这样的对象终于获得了严格而合理的数学定义. 由此, 相关工程技术理论亦获得了严格的数学基础.

当然, 广义函数理论的意义绝不仅仅在于严格解释和定义 $\delta(x)$ 这样的对象. 广义函数理论在理论物理, 工程技术, 微分方程理论, 群表示论以及泛函分析中都着深刻而广泛的应用. 例如, 利用广义函数理论人们建立了微分方程的所谓弱解方法, 从而极大地推动了微分方程理论的发展. 再如, 借助于广义函数理论, 人们可以将求导数运算推广到包括连续函数在内的相当大的一类函数上.

本节, 我们将介绍广义函数理论的大意. 考虑前面提到的质量分布密度 $\delta(x)$. 设 $\varphi(x)$ 是一个连续函数, 则应有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\varphi(x)dx=\varphi(0).$$

其实, 我们有下列合理的形式推导:

$$\begin{aligned}\Big|\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\varphi(x)dx-\varphi(0)\Big| &= \Big|\int_{-\epsilon}^{+\epsilon}\delta(x)(\varphi(x)-\varphi(0))dx\Big|\\ &\leq \max_{|x|\leq\epsilon}|\varphi(x)-\varphi(0)|\int_{-\epsilon}^{+\epsilon}\delta(x)dx\\ &= \max_{|x|\leq\epsilon}|\varphi(x)-\varphi(0)|\\ &\to 0 \quad (\epsilon\to 0).\end{aligned}$$

这样, 虽然 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx$ 的数学意义尚不清楚, 但下列对应关系却是确定的

$$\varphi\colon \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\varphi(x)dx=\varphi(0).$$

因此可以把 $\delta(x)$ 理解为某个连续函数空间上的连续线性泛函. 进一步, 如果取比连续函数空间更小的空间, 那么就可以得到更多的连续线性泛函. 这样的连续线性泛函就是我们后面要介绍的广义函数.

设 $\varphi(x)$ 是定义在实轴 $\mathbb{R}$ 上的函数. 称点集 $\{x\mid\varphi(x)\neq 0\}$ 的闭包为 $\varphi(x)$ 的支撑或支集, 记作 $\operatorname{supp}\varphi$. 若函数 $\varphi(x)$ 的支撑 $\operatorname{supp}\varphi$ 是紧集, 则称 $\varphi(x)$ 具有紧支撑(集). 此时, 必有一个有限闭区间 $[a,b]$ 使得 $\operatorname{supp}\varphi\subset[a,b]$.

定义1 以 $\mathcal{D}$ 表示在 $\mathbb{R}$ 上无限次可微且具有紧支撑的函数的全体. 按照通常加法和数乘 $\mathcal{D}$ 构成线性空间. 在 $\mathcal{D}$ 中定义收敛概念如下: 设 $\{\varphi_n\}\subset\mathcal{D}$, $\varphi\in\mathcal{D}$, 若

(1) 存在区间 $[a,b]$ 使得 $\operatorname{supp}\varphi_n\subset[a,b]$, $\forall\, n\geq 1$;

(2) 对每个 $k\geq 1$, 当 $n\to\infty$ 时函数列 $\varphi_n^{(k)}(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛于函数 $\varphi^{(k)}(x)$,

则称 φ_n 在 $\mathcal{D}$ 中收敛于 φ, 记作 $\varphi_n\xrightarrow{\mathcal{D}}\varphi$. 于是 $\mathcal{D}$ 是一个具有收敛结构的线性空间, 称为基本空间.

定义2 基本空间 $\mathcal{D}$ 上的连续线性泛函叫做广义函数. 若 Φ 是一个广义函数, $\varphi\in\mathcal{D}$, 则常将 $\Phi(\varphi)$ 记作 $\langle\Phi,\varphi\rangle$.

例1 在每个有限区间上都Lebsgue可积的函数称为局部可积函数. 设 f 是一个局部可积函数, 则在基本空间 $\mathcal{D}$ 上可定义如下泛函 $\varPhi_f$:

$$\varPhi_f(\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\varphi(x)dx,\quad \varphi\in\mathcal{D}. \tag{11.1}$$

易见 $\varPhi_f$ 是 $\mathcal{D}$ 上的线性泛函. 设 $\{\varphi_n\}\subset\mathcal{D}$ 且 $\varphi_n\xrightarrow{\mathcal{D}}\varphi\in\mathcal{D}$. 则不难验证 $\varPhi_f(\varphi_n)\to\varPhi_f(\varphi)$. 从而 $\varPhi_f$ 是基本空间 $\mathcal{D}$ 上的一个连续线性泛函, 即是一个广义函数.

上述讨论表明, 局部可积函数与广义函数之间存在着对应关系 $f\mapsto\varPhi_f$. 可以证明这个对应关系还是单射. 因此可以把局部可积函数 f 视为广义函数 $\varPhi_f$. 在此意义下, 我们说局部可积函数是广义函数.

例2 在基本空间 $\mathcal{D}$ 上定义泛函 δ 如下

$$\delta(\varphi)=\varphi(0),\quad \varphi\in\mathcal{D}. \tag{11.2}$$

易见 δ 是 $\mathcal{D}$ 上的线性泛函. 设 $\{\varphi_n\}\subset\mathcal{D}$ 且 $\varphi_n\xrightarrow{\mathcal{D}}\varphi\in\mathcal{D}$. 则在 $\mathbb{R}$ 上函数列 $\varphi_n(x)$ 一致收敛于函数 $\varphi(x)$, 特别地有 $\varphi_n(0)\to\varphi(0)$, 此即 $\delta(\varphi_n)\to\delta(\varphi)$. 这说明 δ 是基本空间 $\mathcal{D}$

上的一个连续线性泛函, 即是一个广义函数. 另一方面, 根据前面的形式推导我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0), \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

因此可将 $\delta(x)$ 视为上述广义函数 δ. 这就是 $\delta(x)$ 的严格数学定义.

设 f 是一个可微函数, 则对任意 $\varphi \in \mathcal{D}$, 使用分部积分公式可得

$$\langle f', \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -\langle f, \varphi'\rangle.$$

这表明 f 的导数 f' 视为广义函数时可由上式的最右端给出.

受此启发, 我们定义广义函数 Φ 的导数 Φ' 为如下广义函数

$$\Phi'(\varphi) = \langle \Phi', \varphi\rangle = -\langle \Phi, \varphi'\rangle = -\Phi(\varphi'), \quad \varphi \in \mathcal{D}. \tag{11.3}$$

可以验证: 对应关系 $\varphi\colon \mapsto -\Phi(\varphi')$ 确实是基本空间 $\mathcal{D}$ 上的一个连续线性泛函, 即是一个广义函数. 由于基本空间中的函数有任意阶导数, 所以广义函数也有任意阶导数.

例3 考虑如下Heaviside 函数

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x < 0 \text{ 时;} \\ 1, & \text{当 } x \geq 0 \text{ 时.} \end{cases} \tag{11.4}$$

易见Heaviside 函数 $H(x)$ 是一个局部可积函数, 因而可视为广义函数. 对任意 $\varphi \in \mathcal{D}$, 我们有

$$\begin{aligned} \langle H', \varphi\rangle &= -\langle H, \varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi'(x)dx \\ &= -\int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle. \end{aligned}$$

可见作为广义函数 $H' = \delta$. 物理文献中常将此记为 $H'(x) = \delta(x)$.