10 有界线性算子空间和共轭空间

前一节, 我们讨论了单个线性算子和单个线性泛函的分析和拓扑性质. 本节, 我们将从整体上讨论线性算子类和线性泛函类, 换言之我们将讨论有界线性算子构成的空间和连续线性泛函构成的空间.

以下 $\mathbb{K}$ 仍将表示实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$. 如无特别说明, 所论赋范线性空间均为 $\mathbb{K}$ 上的赋范线性空间.

设 X 和 Y 是两个赋范线性空间, 以 $\mathcal{B}(X \mapsto Y)$ 表示从 X 到 Y 的有界线性算子全体, 即

$$\mathcal{B}(X \mapsto Y) = \big\{ T \mid T\colon X \mapsto Y \text{ 是有界线性算子} \big\}. \tag{10.1}$$

在 $\mathcal{B}(X \mapsto Y)$ 中可按通常方式引入加法和数乘运算, 即若 $A, B \in \mathcal{B}(X \mapsto Y)$, $\alpha \in \mathbb{K}$, 则规定

$$(A+B)x = Ax + Bx, \quad (\alpha A)x = \alpha(Ax), \quad \forall\, x \in X. \tag{10.2}$$

容易验证上述 $A+B$ 和 αA 仍然是从 X 到 Y 的线性算子, 并且满足

$$\|(A+B)x\| \le (\|A\| + \|B\|)\|x\|, \quad \forall\, x \in X; \tag{10.3}$$

和

$$\|(\alpha A)x\| \le (|\alpha|\|A\|)\|x\|, \quad \forall\, x \in X, \tag{10.4}$$

这表明: $A+B$, $\alpha A \in \mathcal{B}(X \mapsto Y)$. 于是, $\mathcal{B}(X \mapsto Y)$ 关于上述加法和数乘运算构成一个线性空间, 称为算子空间.

定理1 设 X 和 Y 是赋范线性空间, 则算子空间 $\mathcal{B}(X \mapsto Y)$ 关于算子范数构成一个赋范线性空间. 进一步, 若 Y 是Banach 空间, 则 $\mathcal{B}(X \mapsto Y)$ 也是Banach空间.

证明 为证明算子空间 $\mathcal{B}(X \mapsto Y)$ 关于算子范数构成一个赋范线性空间, 只需验证算子范数在 $\mathcal{B}(X \mapsto Y)$ 上具有正定性, 正齐次性和满足三角不等式.

显然, 算子范数具有正定性和满足三角不等式, 下证它还有正齐次性. 其实, 若 $T \in \mathcal{B}(X \mapsto Y)$, $\alpha \in \mathbb{K}$, 则有

$$\|\alpha T\| = \sup_{\|x\|=1} \|\alpha(Tx)\| = \sup_{\|x\|=1} |\alpha|\|Tx\| = |\alpha|\|T\|.$$

下证当 Y 是Banach 空间时, $\mathcal{B}(X \mapsto Y)$ 也是Banach空间. 设 $\{T_n\} \subset \mathcal{B}(X \mapsto Y)$ 是Chauchy列. 则对每个 $x \in X$, 作为 Y 中的点列, $\{T_n x\}$ 满足:

$$\|T_m x - T_n x\| = \|(T_m - T_n)x\| \le \|T_m - T_n\|\|x\|,$$

这说明 $\{T_n x\}$ 是 Y 中的Chauchy列, 又由于 Y 是Banach空间, 所以 $\{T_n x\}$ 在 Y 中收敛. 根据上述讨论, 我们可定义一个映射 $T\colon X\mapsto Y$ 如下

$$Tx=\lim_{n\to\infty}T_n x,\quad x\in X. \tag{10.5}$$

由极限运算的线性性质不难看出 $T\colon X\mapsto Y$ 是一个线性算子. 下证 $T\in\mathcal{B}(X\mapsto Y)$ 并且有 $\|T_n-T\|\to 0$ (当 $n\to\infty$ 时).

其实, 由于 $\{T_n\}$ 是 $\mathcal{B}(X\mapsto Y)$ 中的Chauchy列, 所以它一定有界, 即存在常数 $M\geq 0$ 使得

$$\|T_n\|\leq M,\ \forall\, n\geq 1.$$

由此可得, 对每个 $x\in X$ 成立

$$\|T_n x\|\leq\|T_n\|\|x\|\leq M\|x\|,\quad \forall\, n\geq 1,$$

其中令 $n\to\infty$ 可得 $\|Tx\|\leq M\|x\|$. 可见 T 有界, 从而 $T\in\mathcal{B}(X\mapsto Y)$.

另一方面, 对任意 $\epsilon>0$, 因 $\{T_n\}$ 是Chauchy列, 故存在正整数 $N\geq 1$ 使得当 m, $n>N$ 时, 成立

$$\|T_m-T_n\|<\frac{\epsilon}{2},$$

由此看出

$$\|T_m x-T_n x\|\leq\frac{\epsilon}{2}\|x\|,\quad \forall\, m,\, n>N,\ \forall\, x\in X,$$

在上述不等式中令 $m\to\infty$ 并注意到范数的连续性可得

$$\|Tx-T_n x\|\leq\frac{\epsilon}{2}\|x\|,\quad \forall\, n>N,\ \forall\, x\in X,$$

由此可知, 当 $n>N$ 时, 成立

$$\|T-T_n\|\leq\frac{\epsilon}{2}<\epsilon.$$

这便证明了 $\|T_n-T\|\to 0$ (当 $n\to\infty$ 时). 证毕.

除了加法和数乘运算之外, 算子之间还可以引入乘法运算, 这种乘法运算其实就是映射之间的复合运算.

设 X, Y 和 Z 是三个赋范线性空间. 对于算子 $A\in\mathcal{B}(X\mapsto Y)$ 和 $B\in\mathcal{B}(Y\mapsto Z)$, 定义映射 $BA\colon X\mapsto Z$ 如下:

$$(BA)x=B(Ax),\quad \forall\, x\in X. \tag{10.6}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "A"] \arrow[dr, "BA"'] & Y \arrow[d, "B"] \\ & Z \end{tikzcd} \tag{10.7}$$

容易验证 BA 是 X 到 Z 的线性算子, 并且满足

$$\|(BA)x\| \le (\|B\|\|A\|)\|x\|, \quad x \in X. \tag{10.8}$$

因此 $BA \in \mathcal{B}(X \mapsto Z)$. 我们称算子 BA 为算子 B 与 A 的乘积.

下面考虑算子空间 $\mathcal{B}(X \mapsto X)$, 其中 X 是一个赋范线性空间. 根据前一段的讨论, 算子空间 $\mathcal{B}(X \mapsto X)$ 对算子的乘法运算封闭, 即 $\mathcal{B}(X \mapsto X)$ 中任意两个元素的乘积仍然属于 $\mathcal{B}(X \mapsto X)$. 此外, 由不等式(10.8)可知

$$\|AB\| \le \|A\|\|B\|, \quad \forall\, A, B \in \mathcal{B}(X \mapsto X). \tag{10.9}$$

一般地, 设 $\mathcal{A}$ 是一个赋范线性空间. 如果 $\mathcal{A}$ 中定义了乘法运算, 并且该乘法运算满足条件

$$\|uv\| \le \|u\|\|v\|, \quad \forall\, u,\, v \in \mathcal{A}, \tag{10.10}$$

则称 $\mathcal{A}$ 为赋范代数. 完备的赋范代数称为Banach代数.

根据这个定义 $\mathcal{B}(X \mapsto X)$ 构成一个赋范代数. 若 X 是Banach空间, 则 $\mathcal{B}(X \mapsto X)$ 还是一个Banach代数, 此代数在文献中常称为算子代数.

定义1 设 X 是一个赋范线性空间, 我们称空间 $\mathcal{B}(X \mapsto \mathbb{K})$ 为 X 的共轭空间, 并记作 X'.

值得指出的是, 在大多数文献中赋范线性空间 X 的共轭空间被记做 X^*, 而 X' 则用来表示 X 上的全体线性泛函构成的线性空间.

由于 $\mathbb{K}$ 关于模(绝对值) $|\cdot|$ 构成的赋范线性空间是一个Banach空间, 所以由定理1可直接得到如下结果.

定理2 设 X 是一个赋范线性空间, 则其共轭空间 X' 是Banach空间.

下面, 我们考察一些常见赋范线性空间的共轭空间. 为此我们先引进赋范线性空间之间的同构概念.

定义2 设 X, Y 是两个赋范线性空间. 若存在双射 $J\colon X \to Y$ 满足:

(1) J 是线性的, 即 $J(\alpha x + \beta y) = \alpha Jx + \beta Jy, \forall\, x,\, y \in X, \forall\, \alpha,\, \beta \in \mathbb{K}$;

(2) J 是保范的, 即 $\|Jx\| = \|x\|, \forall\, x \in X$,

则称赋范线性空间 X 与 Y 同构, 其中 J 称为同构映射.

易见, 当 X 与 Y 同构时, Y 与 X 也同构. 因此, 我们可以说 X 与 Y 互相同构. 在泛函分析理论中, 两个互相同构的赋范线性空间往往不加区别, 即可将它们视为相同的对象.

例1 1-幂可和数列空间 l^1 的共轭空间是有界数列空间 l^∞, 即 $(l^1)' = l^\infty$.

证明 对于 $n \geq 1$, 定义数列 e_n 如下

$$e_n = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots),$$

其中数 1 出现在第 n 个位置. 易见 $\{e_n\} \subset l^1$, 并且 $\|e_n\| = 1$, $n \geq 1$. 此外 $\{e_n\}$ 还构成 l^1 的基, 即: 对每个 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k, \cdots) \in l^1$, 成立

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k \quad (\text{依 } l^1\text{-范数收敛}). \tag{10.11}$$

设 $f \in (l^1)'$. 考虑数列 $u_f = (f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_k), \cdots)$. 由于

$$|f(e_k)| \leq \|f\|\|e_k\| = \|f\|, \quad k \geq 1,$$

所以 $u_f \in l^\infty$. 此外, 对于 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k, \cdots) \in l^1$, 由 f 的连续性和(10.11)式得

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f(e_k).$$

由此可见 $|f(x)| \leq \|u_f\|\|x\|$, $\forall\, x \in l^1$. 从而 $\|f\| \leq \|u_f\|$.

现定义映射 $J\colon (l^1)' \to l^\infty$ 如下

$$Jf = u_f = (f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_k), \cdots), \quad f \in (l^1)'. \tag{10.12}$$

我们将证明 $J\colon (l^1)' \to l^\infty$ 为同构映射.

易见 $J\colon (l^1)' \to l^\infty$ 是线性的, 同时由前面的讨论可知

$$\|f\| \leq \|Jf\|, \quad \forall\, f \in (l^1)'.$$

另一方面, 对于 $f \in (l^1)'$, 我们有

$$\|Jf\| = \sup_{k\geq 1} |f(e_k)| \leq \sup_{k\geq 1} \|f\|\|e_k\| = \|f\|.$$

因此 $J\colon (l^1)' \to l^\infty$ 满足 $\|Jf\| = \|f\|$, $\forall\, f \in (l^1)'$, 从而是单射. 为完成证明, 我们还需验证 $J\colon (l^1)' \to l^\infty$ 是满射.

设 $u=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k,\cdots)\in l^\infty$. 则可定义 l^1 上的泛函 f 如下

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\eta_k,\quad x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,\cdots)\in l^1. \tag{10.13}$$

易见 f 是线性泛函, 并且对于 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,\cdots)\in l^1$, 满足

$$|f(x)|\le\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k||\eta_k|\le\sup_{k\ge1}|\eta_k|\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|=\|u\|\|x\|.$$

从而 f 也是连续线性泛函, 即 $f\in(l^1)'$. 容易验证 $u=Jf$. 于是证明了 $J\colon(l^1)'\to l^\infty$ 是满射.

例2 设 $p,\,q>1,\ 1/p+1/q=1$. 则 p-幂可和数列空间 l^p 的共轭空间恰为q-幂可和数列空间 l^q, 即 $(l^p)'=l^q$.

证明 如同例1的证明一样, 我们考虑 l^p 中的点列 $\{e_n\}$, 其中 e_n 由下式定义(其中数字 1 的出现在第 n 个位置)

$$e_n=(0,0,\cdots,0,1,0,\cdots).$$

容易验证 $\{e_n\}$ 构成空间 l^p的基, 并且 $\|e_n\|_p=1$, $n\ge1$. 设 $f\in(l^p)'$. 下证

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f(e_k)|^p<\infty, \tag{10.14}$$

即 $u_f=(f(e_1),f(e_2),\cdots,f(e_k),\cdots)\in l^q$. 其实, 对任意 $n\ge1$, 若令

$$\xi_k=|f(e_k)|^{q-1}\mathrm{sgn}[f(e_k)],\quad 1\le k\le n,$$

则 $x_n=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,0,0,\cdots)\in l^p$, 从而

$$f(x_n)=\sum_{k=1}^{n}\xi_kf(e_k)=\sum_{k=1}^{n}|f(e_k)|^q;$$

另一方面, 由 f 的有界性, 我们有

$$|f(x_n)|\le\|f\|\|x_n\|_p=\|f\|\Big(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^p\Big)^{1/p}=\|f\|\Big(\sum_{k=1}^{n}|f(e_k)|^q\Big)^{1/p};$$

于是得如下不等式

$$\sum_{k=1}^{n}|f(e_k)|^q\le\|f\|^q.$$

由于上面不等式中的 $n \geq 1$ 是任意的, 所以取极限便得

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(e_k)|^q \leq \|f\|^q. \tag{10.15}$$

现定义映射 $J\colon (l^p)' \mapsto l^q$ 如下

$$Jf = u_f = (f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_k), \cdots), \quad f \in (l^p)'. \tag{10.16}$$

我们将证明 $J\colon (l^p)' \mapsto l^q$ 为同构映射. 易见 J 是线性的, 且由(10.15)式可知 $\|Jf\|_q \leq \|f\|$, $f \in (l^p)'$.

另一方面, 对任意 $f \in (l^p)'$ 和 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k, \cdots) \in l^p$, 由于

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k,$$

所以利用泛函 f 的连续性和关于级数的Hölder 不等式可得

$$|f(x)| = \Big|\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f(e_k)\Big| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k||f(e_k)| \leq \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |f(e_k)|^q\Big)^{1/q} = \|x\|_p \|Jf\|_q,$$

此式蕴含着 $\|f\| \leq \|Jf\|_q$. 综上 J 满足 $\|Jf\|_q = \|f\|$, $f \in (l^p)'$, 从而也是单射. 为完成证明, 还需验证 J 是满射.

设 $u = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_k, \cdots) \in l^q$. 则可定义 l^p 上的泛函 f 如下

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k, \quad x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k, \cdots) \in l^p. \tag{10.17}$$

易见 f 是线性泛函, 并且对于 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k, \cdots) \in l^p$, 满足

$$|f(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k||\eta_k| \leq \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q\Big)^{1/q} = \|x\|_p \|u\|_q.$$

从而 f 也是连续线性泛函, 即 $f \in (l^p)'$. 容易验证 $u = Jf$. 于是证明了 $J\colon (l^p)' \mapsto l^q$ 是满射.

综上, 我们证明了 J 是 $(l^p)'$ 到 l^q 的同构映射, 从而 $(l^p)' = l^q$.