泛函分析讲义

王才士

2011年3月

Chap 8 有界线性算子和连续线性泛函

本章我们将研究从一个赋范线性空间 X 到另一个赋范线性空间 Y 的映射, 这类映射常称为算子. 此外, 我们还要研究从一个赋范线性空间到数域的映射, 这类映射常称为泛函. 易见, 泛函是一类特殊的算子, 因而比起一般算子来具有更特殊的性质.

其实, 算子和泛函我们并不陌生. 例如求导数运算 $D = \frac{d}{dt}$ 就是从连续可微函数空间 $C^1[a,b]$ 到连续函数空间 $C[a,b]$ 的算子(称为微分算子), 而积分 $\int_a^b f(t)dt$ 则是连续函数空间 $C[a,b]$ 上的泛函.

如果说函数是数与数之间的对应, 那么算子就是函数与函数之间的对应, 只不过后者是更高层次上的对应.

以下, 如无特别说明, $\mathbf{K}$ 仍将表示实数域 $\mathbf{R}$ 或复数域 $\mathbf{C}$.

§1 有界线性算子和连续线性泛函

先介绍线性算子和线性泛函的定义, 然后考察一些线性算子和线性泛函的实例.

定义1

设 X 和 Y 是数域 $\mathbf{K}$ 上的两个线性空间, $\mathcal{D}$ 是 X 的线性子空间, $T: \mathcal{D} \mapsto Y$ 是一个映射, 如果 T 满足:

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{K}, \ x, y \in \mathcal{D} \tag{1}$$

则称 T为 $\mathcal{D}$ 到 Y 的线性算子. 其中 $\mathcal{D}$ 叫做 T 的定义域, 记作 $\mathcal{D}(T)$, $T\mathcal{D}$ 叫做 T 的值域, 记作 $\mathcal{R}(T)$.

♢ 据惯例, $T\mathcal{D}$ 的定义为: $T\mathcal{D}=\{y \mid y=Tx, \ x \in \mathcal{D}\}$.

由于数域 $\mathbf{K}$ 也是其自身上线性空间, 所以在定义1中可以以 $\mathbf{K}$ 代替 Y. 于是有下面线性泛函的概念.

线性泛函

设 X 是数域 $\mathbf{K}$ 上的线性空间, $\mathcal{D}$ 是 X 的线性子空间, 则称 $\mathcal{D}$ 到 $\mathbf{K}$ 的线性算子为 $\mathcal{D}$ 上的线性泛函.

按此定义, 线性空间 X 上的线性泛函就是 X 到其所在数域 $\mathbf{K}$ 的线性算子.

简单性质

设 T 是一个线性算子. 则 $T0 = 0$, 即 $0 \in \mathcal{N}(T)$, 其中 $\mathcal{N}(T)$ 表示 T 的零空间, 即

$$\mathcal{N}(T) = \{\, x \mid x \in \mathcal{D}(T),\ Tx = 0 \,\}. \tag{2}$$

例1. 相似算子

设 X 是数域 $\mathbf{K}$ 上的线性空间, 给定一个数 $\alpha \in \mathbf{K}$, 则可定义映射 $T: X \mapsto X$ 如下:

$$Tx = \alpha x, \quad x \in X. \tag{3}$$

易见 T 是 X 到其自身的线性算子, 称为相似算子.

◇ 当 $\alpha = 1$时, 相应的相似算子又称为恒等算子, 记作 I_X 或 I.

◇ 当 $\alpha = 0$时, 相应的相似算子称为零算子, 记作 O.

由此可见, 数域 $\mathbf{K}$ 中的每个数都对应着 X 到其自身的一个线性算子—相似算子.

♠ 线性空间 X 到其自身的线性算子常称为 X 上的线性算子.

例2. 微分算子

设 $\mathcal{P}[0,1]$ 表示区间 $[0,1]$ 上的全体多项式构成的线性空间. 定义映射 $T: \mathcal{P}[0,1] \mapsto \mathcal{P}[0,1]$ 如下:

$$(Tx)(t) = \frac{d}{dt}x(t), \quad x \in \mathcal{P}[0,1]. \tag{4}$$

由求导运算的线性性质可知, T 是 $\mathcal{P}[0,1]$ 上的线性算子, 称为微分算子.

取定一个数 $t_0 \in [0,1]$, 则可定义 $\mathcal{P}[0,1]$ 上的泛函 f 如下:

$$f(x) = x'(t_0), \quad x \in \mathcal{P}[0,1]. \tag{5}$$

易见 f 是 $\mathcal{P}[0,1]$ 上的线性泛函.

♠ 微分算子是一类常见而重要的线性算子.

例3. 积分算子

定义映射 $T: C[a,b] \mapsto C[a,b]$ 如下:

$$(Tx)(t) = \int_a^t x(s)ds, \quad x \in C[a,b]. \tag{6}$$

由积分运算的线性性质可知, T 是 $C[a,b]$ 上的线性算子, 称为积分算子.

定义 $C[a,b]$ 上的泛函 f 如下:

$$f(x) = \int_a^b x(t)dt, \quad x \in C[a,b]. \tag{7}$$

则 f 是 $C[a,b]$ 上的线性泛函.

♠ 积分算子也是一类常见而重要的线性算子.

例4. 乘法算子

定义映射 $T\colon C[a,b] \mapsto C[a,b]$ 如下:

$$(Tx)(t) = tx(t), \quad x \in C[a,b]. \tag{8}$$

则不难验证, T 是 $C[a,b]$ 上的线性算子, 称为乘法算子.

♠ 此类算子在量子物理和算子谱论等领域有着重要的意义.

例5. $\mathbf{R}^n$ 上的线性算子

设 A 是一个 $n \times n$ 实方阵, 定义映射 $T\colon \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}^n$ 如下:

$$Tx = Ax, \quad x \in \mathbf{R}^n. \tag{9}$$

其中 Ax 表示矩阵相乘. 则 T 是 $\mathbf{R}^n$ 上线性算子. 反之, 若 T 是 $\mathbf{R}^n$ 上的线性算子, 则一定存在一个实方阵 A , 使得 T 满足(9)式.

例5表明 $\mathbf{R}^n$ 上的线性算子对应着 $n\times n$ 实方阵. 下面的讨论则表明 $\mathbf{R}^n$ 上的线性泛函对应着 $\mathbf{R}^n$ 中的向量.

$\mathbf{R}^n$ 上的线性泛函

取定 $u=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in\mathbf{R}^n$, 则可定义 $\mathbf{R}^n$ 上泛函 f 如下:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i,\quad x\in\mathbf{R}^n \tag{10}$$

其中 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$. 容易验证 f 是 $\mathbf{R}^n$ 上的线性泛函.

反之, 若 f 是 $\mathbf{R}^n$ 上的线性泛函, 则 f 可表示为(10)的形式, 其中 $u=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 由下式确定

$$\alpha_i=f(e_i),\quad 1\le i\le n.$$

此处 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的一个基.

对于赋范线性空间之间线性算子, 我们自然要考虑他们的连续性特征. 下一段的讨论将集中于这一论题.

定义2

设 X 和 Y 是两个赋范线性空间, $T\colon \mathcal{D}(T) \mapsto Y$ 是一个线性算子, 其中 $\mathcal{D}(T)$ 是 X 的一个子空间. 若存在常数 $M \geq 0$ 使得

$$\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X, \quad \forall x \in \mathcal{D}(T), \tag{11}$$

则称 T 是 $\mathcal{D}(T)$ 到 Y 的有界线性算子. 当 $\mathcal{D}(T) = X$ 时, 称 T 是 X 到 Y 的有界线性算子, 简称有界算子.

♢ 在上述框架下, 若线性算子 $T\colon \mathcal{D}(T) \mapsto Y$ 不是有界线性算子, 则称之为无界算子.

下一个定理说明, 对于赋范线性空间之间的线性算子, 它们的连续性与有界性是等价的.

定理1

设 X 和 Y 是两个赋范线性空间, $T: X \mapsto Y$ 是一个线性算子. 则: T是有界算子 $\Longleftrightarrow$ T 是连续算子.

证明

先证 "$\Longrightarrow$" 部分. 此时, 由 T 的线性和有界性得:

$$\|Tu - Tv\|_Y = \|T(u-v)\|_Y \leq M\|u-v\|_X, \quad u, v \in X.$$

任取 $x \in X$. 若点列 $\{x_n\} \subset X$ 依范数收敛于 x, 则由上面不等式看出: $\{Tx_n\}$ 依范数收敛于 Tx. 从而说明 T 在 x 处连续. 由 $x \in X$ 的任意性可知, T 在 X 上处处连续, 即 T 是连续算子.

证明(续)

再证“$\Longleftarrow$”部分. 此时, T 在零向量 0 处连续, 因而存在正数 δ, 使得当 $x \in X$ 且 $\|x-0\|_X < \delta$时, 有

$$\|Tx - T0\|_Y < 1.$$

取 $M = 2/\delta$. 则对任 $x \in X$, 当 $x = 0$时, 不等式 $\|Tx\|_Y \le M\|x\|_X$ 显然成立; 当 $x \neq 0$时, 因

$$\left\| \frac{\delta x}{2\|x\|_X} - 0 \right\|_X = \frac{\delta}{2} < \delta,$$

故

$$\frac{\delta}{2\|x\|_X}\|Tx\|_Y = \left\| T\left(\frac{\delta x}{2\|x\|_X}\right) - T0 \right\|_Y < 1,$$

从而仍有 $\|Tx\|_Y \le M\|x\|_X$. 总之 T 是有界算子.

关于线性算子连续性的更多说明

设 X 和 Y 是两个赋范线性空间, $T: X \mapsto Y$ 是一个线性算子. 则下列条件彼此等价:

1. T 是连续算子(即 T 在 X 上处处连续);
2. T 在 X 的某一点 x_0 处连续;
3. T 在 X 的零向量处连续;
4. T 是有界算子.

其实, "条件(1) $\Rightarrow$ 条件(3)" 显然成立; "条件(3) $\Rightarrow$ 条件(4)" 的证明已在定理1 的证明中给出; "条件(4) $\Rightarrow$ 条件(1)" 的证明也在定理1 的证明中给出; 至于"条件(2) $\Leftrightarrow$ 条件(3)" 的正确性则由下式看出

$$\|Tx - Tx_0\|_Y = \|T(x - x_0) - T0\|_Y.$$

线性泛函是特殊的线性算子, 因而有更加特别的连续性特征.

定理2

设 X 是一个赋范线性空间, f 是 X 上的一个线性泛函. 则: f 是 X 上的连续泛函 $\Longleftrightarrow f$ 的零空间 $\mathcal{N}(f)$ 是 X 的闭子空间.

证明

先证 "$\Longrightarrow$" 部分. 此时, f 在 X 上连续. 设点列 $\{x_n\} \subset \mathcal{N}(f)$ 依范数收敛于 $x \in X$, 则由 f 的连续性得:

$$0 = f(x_n) \longrightarrow f(x) \quad (n \longrightarrow \infty),$$

从而 $f(x) = 0$, 即 $x \in \mathcal{N}(f)$. 这说明 $\mathcal{N}(f)$ 包含其所有聚点, 从而是 X 的闭子空间.

证明(续)

再证“$\Longleftarrow$”部分. 此时, $\mathcal{N}(f)$ 是 X 的闭子空间, 往证 f 连续. 根据定理1, 只需证明 f 有界. 用反证法. 若 f 无界, 则有点列 $\{x_n\} \subset X$ 满足

$$|f(x_n)| > n\|x_n\|, \quad n \geq 1.$$

易见 $f(x_n) \neq 0$ $(n \geq 1)$, 特别地 $f(x_1) \neq 0$. 此外还可以看出 $x_n/f(x_n) \to 0$. 令:

$$z_n = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_n)} x_n, \quad n \geq 1.$$

则容易看出 $\{z_n\} \subset \mathcal{N}(f)$. 另一方面, 我们不难发现 $z_n \to x_1$. 于是由 $\mathcal{N}(f)$ 的闭性得 $x_1 \in \mathcal{N}(f)$, 从而 $f(x_1) = 0$. 矛盾!

定义3

设 X 和 Y 是赋范线性空间, $T\colon \mathcal{D}(T) \mapsto Y$ 是一个线性算子, 其中 $\mathcal{D}(T)$ 是 X 的子空间. 定义

$$\|T\| = \sup\left\{ \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \;\middle|\; x \neq 0,\ x \in \mathcal{D}(T) \right\}. \tag{12}$$

称之为算子 T 的范数.

♠ 易见: T 有界 $\Leftrightarrow \|T\| < \infty$. 当 T 有界时, $\|T\|$ 反映了 T 的最大伸缩率, 并且

$$\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|, \quad \forall x \in \mathcal{D}(T). \tag{13}$$

因此 $\|T\| = \min\{ M \mid M \geq 0, M$ 满足(11) $\}$.

引理1

设 X 和 Y 是赋范线性空间, $T\colon \mathcal{D}(T) \mapsto Y$ 是一个有界算子, 其中 $\mathcal{D}(T)$ 是 X 的子空间. 则

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\left\{\|Tx\| \mid x \in \mathcal{D}(T),\ \|x\| = 1\right\} \\ &= \sup\left\{\|Tx\| \mid x \in \mathcal{D}(T),\ \|x\| \le 1\right\}. \end{aligned} \tag{14}$$

证明

令

$$\alpha = \sup\left\{\|Tx\| \mid x \in \mathcal{D}(T),\ \|x\| = 1\right\}$$
$$\beta = \sup\left\{\|Tx\| \mid x \in \mathcal{D}(T),\ \|x\| \le 1\right\}.$$

易见 $\alpha \le \beta$. 当 $\|x\| \le 1$ 时, $\|Tx\| \le \|T\|\|x\| \le \|T\|$, 因此 $\beta \le \|T\|$.

证明(续)

下证 $\|T\| \leq \alpha$. 其实, 若 $x \in \mathcal{D}(T)$ 且 $x \neq 0$, 则 $\left\|x/\|x\|\right\| = 1$. 于是

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \alpha, \quad x \in \mathcal{D}(T), x \neq 0.$$

由此可知 $\|T\| \leq \alpha$.

以下, 我们例举一些有界线性算子和有界线性泛函.

例6. 比例算子

赋范线性空间 X 上的比例算子 $Tx = \alpha x$ 是有界线性算子. 并且

$$\|T\| = |\alpha|. \tag{15}$$

特别地 $\|I\| = 1$, $\|O\| = 0$.

例7. 连续核定义的积分算子

考虑连续函数空间 $C[0,1]$. 设 $K(t,\tau)$ 是 $[0,1]\times[0,1]$ 上的二元连续函数. 定义映射$T\colon C[0,1]\mapsto C[0,1]$ 如下: 对每个 $x\in C[0,1]$, 规定 $Tx=\hat{x}$, 其中

$$\hat{x}(t)=\int_0^1 K(t,\tau)x(\tau)d\tau,\quad t\in[0,1] \tag{16}$$

结论: 算子 T 是 $C[0,1]$ 上的有界线性算子, 并且具有如下范数

$$\|T\|=\max_{0\le t\le 1}\int_0^1 |K(t,\tau)|d\tau. \tag{17}$$

算子 T 称为连续核定义的积分算子, 其中二元连续函数 $K(t,\tau)$ 叫做 T 的核.

例8. 不定积分定义的积分算子

考虑函数空间$L^1[a,b]$. 定义映射$T\colon L^1[a,b]\mapsto L^1[a,b]$ 如下: 对每个$f\in L^1[a,b]$, 规定 $Tf=\tilde{f}$, 其中

$$\tilde{f}(t)=\int_a^t f(\tau)d\tau,\quad t\in[a,b]. \tag{18}$$

易见T 是$L^1[a,b]$ 上的线性算子.

结论: 算子T 是$L^1[a,b]$ 上的有界线性算子, 并且具有如下范数

$$\|T\|=b-a. \tag{19}$$

算子T 称为不定积分定义的积分算子.

◇ Lebesgue 可积函数的不定上限积分所定义的函数是绝对连续函数.

例9. 微分算子的无界性

考虑多项式空间 $\mathcal{P}[0,1]$, 赋以最大模范数. 定义映射 T 为 $\mathcal{P}[0,1]$ 上的微分算子, 即

$$Tx(t) = \frac{d}{dt}x(t), \quad x \in \mathcal{P}[0,1]. \tag{20}$$

结论: 算子 T 是 $\mathcal{P}[0,1]$ 上的无界线性算子.