泛函分析讲义

王才士

西北师范大学数学与统计学院

§8 赋范线性空间和Banach空间

在既有拓扑结构又有代数结构的空间中, 有一类空间显得特别重要和有用, 那就是赋范线性空间. 本节, 我们将详细介绍此类空间. 以下, $\mathbb{K}$ 仍表示实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$.

定义1

设 X 是数域 $\mathbb{K}$ 上的一个线性空间, $\|\cdot\|$ 是一个定义在 X 上的实值函数. 若 $\|\cdot\|$ 满足:

(i) $\|x\| \geq 0,\ x \in X$; 且对 $x \in X$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(ii) $\|ax\| = |a|\|x\|,\ a \in \mathbb{K}, x \in X$;

(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|,\ x, y \in X$,

则称 $\|\cdot\|$ 是 X 上的范数(称 $\|x\|$ 为 x 的范数), 而称 $(X, \|\cdot\|)$ 为(数域 $\mathbb{K}$ 上的)赋范线性空间.

范数的一个性质

$$\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x-y\|, \quad x, y \in X. \tag{1}$$

可见, 线性空间上的范数与数域上的绝对值(模)有着类似的性质.

依范数收敛

设 $\{x_n\}$ 是赋范线性空间 $(X, \|\cdot\|)$ 中的一个点列, 若

$$\|x_n - x\| \to 0 \ (n \to \infty),$$

则称 $\{x_n\}$ 依范数收敛于 x, 记作$x_n \to x \ (n \to \infty)$ 或$\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

范数导出的距离

设 $(X, \|\cdot\|)$ 是一个赋范线性空间. 定义 X 上的二元函数 d 如下:

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in X. \tag{2}$$

则 d 是 X 上的一个距离, 称为范数 $\|\cdot\|$ 导出的距离.

由此可见, 赋范线性空间是一类特殊的度量空间. 易见, 在赋范线性空间中, 点列 $\{x_n\}$ 依范数收敛于 x 等价于 $\{x_n\}$ 按导出的距离收敛于 x, 即

依范数收敛与按导出距离收敛的一致性

$$\|x_n - x\| \to 0 \ (n \to \infty) \iff d(x_n, x) \to 0 \ (n \to \infty).$$

关于导出距离的性质

设 $(X, \|\cdot\|)$ 是一个赋范线性空间, d 是范数 $\|\cdot\|$ 导出的距离. 则 d 满足:

$$d(x,y) = d(x-y,0), \quad d(ax,0) = |a|d(x,0), \tag{3}$$

其中 $x \in X$, $a \in \mathbb{K}$.

可以验证, 如果 d 是线性空间 X 上的一个距离, 并且满足性质(3), 则 d 一定是某个范数导出的距离.

有界集的特征

设 D 是赋范线性空间 X 一个子集. 则 D 有界的充分必要条件是存在正数 M 使得 $\|x\| \le M$, $\forall\, x \in D$.

范数的连续性

设 $(X, \|\cdot\|)$ 是一个赋范线性空间. 则其范数是连续的, 即: 当点列 $x_n \to x$ 时, 有 $\|x_n\| \to \|x\|$.

可见赋范线性空间的范数是该空间上的一个连续泛函. 其实不仅范数是连续的, 赋范线性空间中的加法和数乘运算也都是连续的.

加法和数乘运算的连续性

设 $(X, \|\cdot\|)$ 是一个赋范线性空间. 则其加法和数乘运算都是连续的, 即:

(i) 若点列 $x_n \to x$, $y_n \to y$, 则和点列 $x_n + y_n \to x + y$;

(ii) 若数列 $a_n \to a$, 点列 $x_n \to x$, 则数乘点列 $a_n x_n \to ax$.

♠ 完备的赋范线性空间叫做Banch空间.

例1. 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$

欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 关于下列范数(欧氏范数)构成一个Banch空间:

$$\|x\| = \sqrt{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \cdots + |\xi_n|^2} \tag{4}$$

其中 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

显然欧氏范数导出的距离恰为前面介绍过的欧氏距离, 因而 $\mathbb{R}^n$ 关于欧氏范数构成一个Banch空间.

例2. 连续函数空间 $C[a,b]$

连续函数空间 $C[a,b]$ 关于下列最大模范数构成一个Banch空间:

$$\|x\| = \max_{a \le t \le b} |x(t)|, \quad x \in C[a,b]. \tag{5}$$

例3. 有界数列空间 l^∞

有界数列空间 l^∞ 关于下列范数构成一个Banch空间:

$$\|x\| = \sup_k |\xi_k| \tag{6}$$

其中 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k, \cdots) \in l^\infty$.

例4. p-幂可积函数空间 $L^p[a,b]$

设 $f(t)$ 是区间 $[a,b]$ 上的一个可测函数. 称 $f(t)$ 是一个p-幂可积函数如果

$$\int_a^b |f(t)|^p dt < \infty. \tag{7}$$

以 $L^p[a,b]$ 表示在区间 $[a,b]$ 上p-幂可积函数的全体. 对于f, $g \in L^p[a,b]$, 若 $f(t) = g(t)$ a.e., 则规定 $f = g$.

$L^p[a,b]$ 是一个线性空间

◇ 易见, $L^p[a,b]$ 对数乘运算封闭.

◇ 利用不等式 $|a+b|^p \leq 2^p(|a|^p+|b|^p)$ 可验证 $L^p[a,b]$ 对加法运算封闭.

L^p-范数 $\|\cdot\|_p$

设 $p>0, f\in L^p[a,b]$, 则规定:

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{8}$$

称之为 f 的 L^p-范数.

下一引理给出了关于乘积函数积分的所谓 Hölder 不等式. 这个不等式在函数空间理论中有着重要的意义.

引理1. (Hölder 不等式)

设 $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 则对任意 $f \in L^p[a,b]$, $g \in L^q[a,b]$, 都有 $fg \in L^1[a,b]$, 并且成立

$$\int_a^b |f(t)g(t)|dt \le \|f\|_p \|g\|_q. \tag{9}$$

◇ 使用如下均值不等式可验证 $fg \in L^1[a,b]$:

$$A^{\frac{1}{p}} B^{\frac{1}{q}} \le \frac{1}{p} A + \frac{1}{q} B$$

其中, A 和 B 为任意正数, $p, q > 1$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

◇ 使用Lebesgue 积分的性质可验证不等式(9).

Hölder 不等式的证明

当 $\|f\|_p\|g\|_q = 0$ 时, 必有 $f(t)g(t) = 0$ a.e.于$[a,b]$, 从而不等式(9)成立. 下面考虑 $\|f\|_p\|g\|_q > 0$ 的情形. 此时必有 $\|f\|_p > 0$, $\|g\|_q > 0$. 定义 $[a,b]$ 上的函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 如下:

$$\varphi(t) = \frac{f(t)}{\|f\|_p}, \quad \psi(t) = \frac{g(t)}{\|g\|_q}.$$

显然 $\varphi\psi \in L^1[a,b]$. 此外我们还有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\int_a^b |f(t)g(t)|dt &= \int_a^b |\varphi(t)\psi(t)|dt \\ &\leq \frac{1}{p}\int_a^b |\varphi(t)|^p dt + \frac{1}{q}\int_a^b |\psi(t)|^p dt = 1.\end{aligned}$$

由此可得不等式(9).

引理2. (Minkowski 不等式)

设 $p \geq 1$, $f, g \in L^p[a,b]$, 则 $f+g \in L^p[a,b]$, 并且

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{10}$$

♢ $L^p[a,b]$ 对加法的封闭性已在前面得到验证.

♢ 当 $p=1$ 时, 可直接验证不等式(10).

♢ 当 $p>1$ 时, 可利用 Hölder 不等式和下列不等式推导出不等式(10):

$$|a+b|^p \leq |a||a+b|^{p-1} + |b||a+b|^{p-1}.$$

定理1

若 $p \geq 1$, 则 $L^p[a,b]$ 关于 L^p-范数 $\|\cdot\|_p$ 构成一个赋范线性空间. 其中 $\|\cdot\|_p$ 的定义见(8)式.

♢ 只需验证 $\|\cdot\|_p$ 满足范数定义中的三个条件. 其实, 正定性条件和正齐次性条件显然满足, 而由Minkowski 不等式可知三角不等式条件也满足.

定理2

若 $p \geq 1$, 则 $L^p[a,b]$ 关于 L^p-范数 $\|\cdot\|_p$ 构成一个Banach空间.

♢ 需要验证: 若 $\{f_n\}$ 是 $L^p[a,b]$ 中的Chauchy 列, 则 $\{f_n\}$ 依范数收敛于 $L^p[a,b]$ 中的某个元素 f. 证明中用到的主要工具是关于Lebesgue 积分的Fatou 引理.

证明的第一步

由 $\{f_n\}$ 是Chauchy 列的属性可以推知存在子列 $\{f_{n_k}\}$ 满足

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq \frac{1}{2^k}, \quad k \geq 1.$$

从而

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)| dt \leq \sum_{k=1}^{\infty} M \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq M,$$

其中 $M = (b-a)^{\frac{p-1}{p}}$ (当 $p > 1$ 时) 或 $M = 1$ (当 $p > 1$ 时). 这意味着

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)| < \infty, \text{ a.e.于 } [a,b].$$

证明的第二步

由第一步的结论知，$\{f_{n_k}(t)\}$ a.e.收敛一个可测函数$f(t)$. 又当$k \geq 2$时有

$$\|f_{n_k}\|_p \leq \sum_{j=1}^{k-1} \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p + \|f_{n_1}\|_p \leq 1 + \|f_{n_1}\|_p.$$

所以

$$\int_a^b |f_{n_k}(t)|^p dt \leq \left(1 + \|f_{n_1}\|_p\right)^p, \quad k \geq 2.$$

因 $f_{n_k}(t) \to f(t)$ a.e., 故使用Fatou 引理可得

$$\int_a^b |f(t)|^p dt \leq \left(1 + \|f_{n_1}\|_p\right)^p.$$

这说明$f \in L^p[a,b]$.

证明的第三步

$\forall\,\epsilon > 0$, 因 $\{f_n\}$ 是Chauchy 列, 故存在 $N \geq 1$, 当 $m, n > N$ 时, 有

$$\int_a^b |f_m(t) - f_n(t)|^p dt = \|f_m - f_n\|_p^p < \epsilon^p.$$

特别地, 当 $m, k > N$ 时, 有

$$\int_a^b |f_m(t) - f_{n_k}(t)|^p dt < \epsilon^p.$$

令 $k \to \infty$ 并使用Fatou 引理得

$$\|f_m - f\|_p^p = \int_a^b |f_m(t) - f(t)|^p dt \leq \epsilon^p, \quad m > N.$$

可见 $\{f_n\}$ 依范数收敛于 f.

$C[a,b]$ 关于 L^p-范数的完备化

$C[a,b]$ 是 $L^p[a,b]$ 一个子空间，但不是闭子空间．由此可知，$C[a,b]$ 关于 L^p-范数 $\|\cdot\|_p$ 虽构成赋范线性空间，但并不完备．

然而可以证明：$C[a,b]$ 关于 L^p-范数 $\|\cdot\|_p$ 的完备化就是 p-幂可积函数空间 $L^p[a,b]$．

例5. p-幂可和数列空间 l^p

类似于 $L^p[a,b]$ 的情形，对于 $x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3\cdots)\in l^p$，若定义

$$\|x\|_p=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{11}$$

则可证明 l^p 关于 $\|\cdot\|_p$ 构成一个赋范线性空间，并且不难验证该空间还是完备的．

下面, 我们讨论有限维赋范线性空间的某些独特性质.

定理3

设 X 是一个 n维赋范线性空间, $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是其一个基, 则存在正常数 M 和 M', 使得对一切

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k \in X,$$

成立

$$M\|x\| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq M'\|x\|. \tag{12}$$

该定理的证明用到了欧式空间单位球面的紧性.

证明

显然有

$$\|x\| \leq \left\| \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k \right\| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} \|e_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

由此得

$$M\|x\| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

其中 $M = \left(\sum_{k=1}^{n} \|e_k\|^2 \right)^{-1/2}$. 下面考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的函数 $f(u)$:

$$f(u) = \left\| \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k \right\|, \quad u = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n.$$

证明(续)

设 $u=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$, $v=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\in\mathbb{R}^n$, 则

$$|f(u)-f(v)|\leq\left(\sum_{k=1}^{n}\|e_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\|u-v\|.$$

可见 $f(u)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数, 因而在 $\mathbb{R}^n$ 的单位球面上取得最小值 c_0. 易见 $c_0>0$.

设 $u\in\mathbb{R}^n$ (不妨设 $u\neq 0$). 若令 $u_0=u/\|u\|$, 则 u_0 属于 $\mathbb{R}^n$ 的单位球面, 从而有

$$\frac{\|x\|}{\|u\|}=\frac{f(u)}{\|u\|}=f\left(\frac{u}{\|u\|}\right)\geq c_0.$$

证明(续)

由此并注意到 $\|u\| = \left(\sum_{k=1}^{n}\|\xi_k\|^2\right)^{1/2}$ 得

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq M'\|x\|$$

其中 $M' = 1/c_0$.

推论1

设 X 是一个有限维线性空间. 若 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_1$ 是 X 上的两个范数, 则必有常数 $M, M' > 0$, 使得

$$M\|x\| \leq \|x\|_1 \leq M'\|x\|, \quad x \in X. \tag{13}$$

即范数 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_1$ 等价.

定义2

设 $(X, \|\cdot\|_X)$ 和 $(Y, \|\cdot\|_Y)$ 是两个赋范线性空间. 若存在线性双射 $T: X \mapsto Y$ 和正数 M, M' 满足

$$M\|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \leq M'\|x\|_X, \quad x \in X, \tag{14}$$

则称 $(X, \|\cdot\|_X)$ 与 $(Y, \|\cdot\|_Y)$ 拓扑同构.

由定理3立得如下关于有限维赋范线性空间的拓扑同构基本结论.

推论2

若 X 是一个有限维赋范线性空间, 则 X 必与同维数的欧氏空间拓扑同构. 相同维数的有限维赋范线性空间彼此拓扑同构.