泛函分析讲义

王才士

西北师范大学数学与统计学院

§7 线性空间

在许多数学问题和实际问题中, 我们遇到的空间不仅要求有拓扑结构(可进行极限运算), 而且还要求有代数结构(可进行加法、数乘等代数运算). 后面的章节我们将具体考察既有拓扑结构又有代数结构的两类空间.

本节, 我们先回顾一类常见的代数结构, 即所谓线性结构. 这类结构涉及加法和数乘两种代数运算.

以下, 如无特别说明, 总假定 $\mathbb{K}$ 表示实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$.

定义1

设 X 是一个非空集合, 其中定义了如下两种运算: X 的元素之间的加法运算“$+$”; $\mathbb{K}$ 中的数与 X 的元素之间的数乘运算“$\cdot$”(数乘运算符号“$\cdot$”常省略). 如果这两种运算满足:

(一) X 关于加法运算“$+$”构成一个加法群, 即满足:

(1) 结合律 $(x+y)+z=x+(y+z), \quad \forall x,y,z\in X$;

(2) 交换律 $x+y=y+x, \quad \forall x,y\in X$;

(3) 存在 $\theta\in X$, 使 $x+\theta=x, \quad \forall x\in X$ (称 θ 为零元);

(4) 对每个 $x\in X$, 存在 $x'\in X$ 使 $x+x'=\theta$ (称 x' 为 x 的负元, 并记作 $x'=-x$);

定义1 (续)

(二) 数乘运算“$\cdot$”满足(运算符号“$\cdot$”常省略):

(5) $1x = x, \quad \forall x \in X$;

(6) $a(bx) = (ab)x, \quad \forall a, b \in \mathbb{K}, \forall x \in X$;

(7) $a(x + y) = ax + ay, \quad \forall a \in \mathbb{K}, \forall x, y \in X$;

(8) $(a + b)x = ax + bx, \quad \forall a, b \in \mathbb{K}, \forall x \in X$;

则称 X 关于上述加法和数乘运算构成数域 $\mathbb{K}$ 上的一个线性空间或向量空间, 其元素常称为向量.

♠ 实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间简称为实线性空间. 同理, 复数域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间简称为复线性空间.

运算性质

设 X 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, 则成立:

$$0x = \theta, \quad \forall x \in X;$$

$$a\theta = \theta, \quad \forall a \in \mathbb{K};$$

$$(-1)x = -x, \quad \forall x \in X.$$

♣ 今后, 常把零向量 θ 记作 0. 这样以来, 需要根据上下文来判断 0 的确切意义.

以下是一些常见的线性空间的例子, 其中一些是我们所熟悉的, 另一些是新的.

例1 欧氏空间 $\mathbf{R}^n$.

在 $\mathbb{R}^n$ 中定义加法和数乘运算如下:

$$x+y=(\xi_1+\eta_1,\ \xi_2+\eta_2,\ \cdots,\ \xi_n+\eta_n),$$
$$ax=(a\xi_1,\ a\xi_2,\ \cdots,\ a\xi_n),$$

其中 $a\in\mathbb{R}$, $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$, $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\in\mathbb{R}^n$. 容易验证: $\mathbb{R}^n$ 关于上述加法和数乘运算构成一个实线性空间.

♣ 类似地, $\mathbb{C}^n$ 构成一个复线性空间. 此处 $\mathbb{C}^n$ 表示 $\mathbb{C}$ 的 n 次笛卡尔乘积.

例2 连续函数空间 $C[a,b]$.

在 $C[a,b]$ 中定义加法和数乘运算如下:

$$(x+y)(t)=x(t)+y(t),$$
$$(ax)(t)=ax(t),$$

其中 a 是数, $x, y\in C[a,b]$. 容易验证: $C[a,b]$ 关于上述加法和数乘运算构成一个线性空间.

♣ 一般地, 如果 Ω 是一个非空集合, $\mathcal{F}$ 是由 Ω 上的某些函数构成函数族. 对于 $\mathcal{F}$ 中元素 f 和 g 以及数 a, 我们总按如下方式定义它们的和及数积:

- 和 $f+g$ 的定义: $(f+g)(t)=f(t)+g(t), \quad t\in\Omega$,
- 数积 af 的定义: $(af)(t)=af(t), \quad t\in\Omega$.

♣ 如果对每对 $f,\ g\in\mathcal{F}$ 及任何数 a, 都有 $f+g,\ af\in\mathcal{F}$, 那么 $\mathcal{F}$ 按上述加法和数乘运算构成一个线性空间.

p-幂可和数列

设 $p>0$. 若数列 $x=(\xi_k)_{k\geq 1}=(\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_k,\cdots)$ 满足:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p<\infty,$$

则称 x 是一个 p-幂可和数列(教材称 p-幂收敛数列, 似不确切).

例3 p-幂可和数列空间 l^p

设 $p > 0$ 给定. 以 l^p 表示p-幂可和数列的全体. 对于 $x, y \in l^p$ 及数 a, 定义:

- 和 $x + y = (\xi_k + \eta_k)_{k \geq 1}$, 其中 $x = (\xi_k)_{k \geq 1}$, $y = (\eta_k)_{k \geq 1}$;
- 数乘 $ax = (a\xi_k)_{k \geq 1}$, 其中 $x = (\xi_k)_{k \geq 1}$.

可以证明: 对于任意 $x, y \in l^p$ 及任意数 a, 都有 $x + y, ax \in l^p$. 从而 l^p 关于上述加法和数乘运算构成一个线性空间.

其实 $ax \in l^p$ 显然. 至于 $x + y \in l^p$, 则可利用如下不等式得到验证:

$$|\xi_k + \eta_k|^p \leq 2^p(|\xi_k|^p + |\eta_k|^p).$$

♠ 一般地, 如果 S 是某些数列构成的集合, 那么我们总是按下列方式定义 S 中元素的“和”及“数积”:

- 和 $x+y=(\xi_k+\eta_k)_{k\geq 1}$, 其中 $x=(\xi_k)_{k\geq 1}$, $y=(\eta_k)_{k\geq 1}$;
- 数乘 $ax=(a\xi_k)_{k\geq 1}$, 其中 a 是一个数, $x=(\xi_k)_{k\geq 1}$.

♠ 容易验证: 若对于任意 $x, y\in S$ 及任意数 a, 都有 $x+y$, $ax\in S$, 则 S 关于上述加法和数乘运算构成一个线性空间.

下面, 我们回到一般线性空间.

线性子空间

设 X 是数域 $\mathbb{K}$ 上的一个线性空间, $M \subset X$ 非空. 若 M 关于 X 中的加法及数乘运算也构成 $\mathbb{K}$ 上的一个线性空间, 则称 M 为 X 的线性子空间, 简称子空间.

♠ 易证: M 构成 X 的子空间 $\Longleftrightarrow M$ 满足: $\alpha x + \beta y \in M, \forall\ x, y \in M$, 即 M 对线性运算封闭.

♠ 易见, X 本身和 $\{0\}$ 都是 X 的子空间, 称它们为 X 的平凡子空间.

♠ 若 M 是 X 的子空间且 $M \neq X$, 则称 M 是 X 的一个真子空间.

线性组合

设 X 是数域 $\mathbb{K}$ 上线性空间. 对于向量 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$ 及数 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$, 称

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$$

为向量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一个线性组合, 其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 称为组合系数.

以下, 如无特别说明, 我们总假定 X 是数域 $\mathbb{K}$ 上一个给定的线性空间.

张成的子空间

设 $D \subset X$ 非空, 以 $\operatorname{span} D$ 表示 D 内向量的一切线性组合构成的集合, 即

$$\operatorname{span} D = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \,\middle|\, a_k \in \mathbb{K},\ x_k \in D,\ 1 \leq k \leq n,\ n \geq 1 \right\}.$$

则 $\operatorname{span} D$ 是 X 的一个子空间, 称之为 D 张成的线性子空间.

♣ 容易验证 $\operatorname{span} D$ 也是包含 D 的最小线性子空间.

定义2

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是线性空间 X 中的一组向量. 若存在一组不全为零的数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 使得

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0,$$

则称向量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ **线性相关**.

若向量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 不是线性相关的, 则称它们**线性无关**, 或称 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是一个**线性无关向量组**.

♠ 下列两个说法等价:

1. 向量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 线性无关;
2. $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$ 蕴含 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

♠ 设 D 是线性空间 X 子集. 若 D 中的任意有限个向量都线性无关, 则称 D 是 X 的一个线性无关子集.

定义4

设 X 是一个线性空间, D 是 X 的一个线性无关子集. 如果 $\operatorname{span} D = X$, 则称 D 为 X 的基, 而 D 的基数称为 X 的维数, 记作 $\dim X$.

♠ 设 D 是线性空间 X 的基. 如果 D 的基数有限, 则称 X 是有限维线性空间, 否则称 X 是无穷维线性空间.

♠ 如果 X 只含零元素, 则称 X 为零维空间.

♠ 有限维线性空间的维数不随基的不同而改变.

♠ $\mathbb{R}^n$ 是 n-维线性空间; 而 $C[a, b]$ 是无穷维线性空间.