泛函分析讲义

王才士

西北师范大学数学与统计学院

§6 压缩映射原理

本节, 我们介绍基于完备性概念的一个重要定理, 即Banach压缩映射原理. 该原理具有多方面的应用, 是处理许多存在唯一性问题(如微分方程, 积分方程, 代数方程等)的有力工具.

定义1

设 (X, d) 是一个度量空间, $T: X \to X$ 是一个映射. 如果存在正数 $\theta \in (0, 1)$, 使得对于一切 $x, y \in X$, 都有

$$d(Tx, Ty) \leq \theta d(x, y),$$

则称 T 是 X 上的一个压缩映射, 其中 θ 称为压缩系数.

♣ 压缩映射的几何意义是显而易见的: 点 x, y 经过压缩映射 T 作用后, 它们的像之间的距离缩短了, 不超过 $d(x, y)$ 的 θ 倍.

定理1 (Banach压缩映射原理)

设 (X, d) 是一个完备的度量空间, $T: X \to X$ 是一个压缩映射, 则存在唯一的一个点 $x^* \in X$ 满足 $Tx^* = x^*$.

♣ 满足关系 $Tx = x$ 的点 x 叫做映射 T 的不动点 (fixed point).

♣ Banach压缩映射原理的意义在于它揭示了如下事实: 在完备的度量空间中, 一个压缩映射有且仅有一个不动点.

定理1证明

设 T 的压缩系数为 θ, 即 θ 满足 $d(Tx, Ty) \le \theta d(x, y)$. 取 $x_0 \in X$, 并令 $x_n = Tx_{n-1}$, $n = 1, 2, \cdots$.

下证 $\{x_n\}$是 X 中的Cauchy点列. 其实, 使用归纳法可以得到

$$d(x_{k-1}, x_k) = d(Tx_{k-2}, Tx_{k-1}) \le \theta\, d(x_{k-2}, x_{k-1}) \le \cdots \le \theta^{k-1} d(x_0, x_1).$$

由此得, 对于任意 $m, n \ge 1$ (不妨设 $m < n$), 有

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\le d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\le (\theta^m + \theta^{m+1} + \cdots + \theta^{n-1}) d(x_0, x_1) \\ &\le \frac{\theta^m}{1-\theta} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

定理1证明

上述不等式表明 $\{x_n\}$是 X 中的一个Cauchy点列. 又由于 X 完备, 所以 $\{x_n\}$ 是 X 中的收敛点列, 即存在 $x^* \in X$ 使 $x_n \to x^*$.

下证 x^* 是 T 的不动点. 由压缩条件 $d(Tx, Ty) \leq \theta d(x, y)$ 可以看出, T 是 X 上的连续映射. 于是由关系式 $x_n = Tx_{n-1}$ 通过取极限可以得到 $x^* = Tx^*$, 即 x^* 是 T 的不动点.

最后验证 x^* 是 T 的唯一不动点. 其实, 如果 $x' \in X$ 满足 $Tx' = x'$, 则

$$d(x^*, x') = d(Tx^*, Tx') \leq \theta\, d(x^*, x').$$

因 $0 < \theta < 1$, 故 $d(x^*, x') = 0$, 从而 $x^* = x'$. 这表明 x^* 是 T 的唯一不动点.

压缩映射原理在微分方程、积分方程和代数方程的解的存在唯一性问题以及许多分析问题中都有重要的应用. 作为示例, 下面给出隐函数定理的压缩映射原理证法.

隐函数定理

设函数 $F(x,y)$ 在区域 $D=\{(x,y) \mid a \le x \le b,\ y \in \mathbb{R}\}$ 上连续, 并且处处有关于 y 的偏导数 $F'_y(x,y)$. 如果存在常数 m 和 M 满足 $0 < m < M$, 并且使得 $m \le F'_y(x,y) \le M$, $\forall\,(x,y) \in D$, 则在区间 $[a,b]$ 上有唯一的一个连续函数 $y = \varphi(x)$ 满足

$$F(x,\varphi(x)) = 0, \quad \forall\, x \in [a,b].$$

这里 $[a,b]$ 是一个给定的闭区间且 $a < b$.

隐函数定理的压缩映射原理证法

取连续函数空间 $(C[a,b],d)$, 其中 d 为最大模距离. 对于每个 $\varphi \in C[a,b]$, 以 f_φ 表示如下函数

$$f_\varphi(x) = \varphi(x) - \frac{1}{M}F\big(x,\varphi(x)\big), \quad x \in [a,b],$$

易见 $f_\varphi \in C[a,b]$. 现定义映射 $T\colon C[a,b] \to C[a,b]$ 如下: $T\varphi = f_\varphi$, $\varphi \in C[a,b]$.

我们将证明 $T\colon C[a,b] \to C[a,b]$ 是一个压缩映射. 其实, 如果 $\varphi_1, \varphi_2 \in C[a,b]$, 则由微分中值定理可得

$$|f_{\varphi_1}(x) - f_{\varphi_2}(x)| \le \Big(1 - \frac{m}{M}\Big)|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|, \quad x \in [a,b],$$

此式蕴含着 $d(T\varphi_1, T\varphi_2) \le (1 - \frac{m}{M})d(\varphi_1,\varphi_2)$.

隐函数定理的压缩映射原理证法

由于 $0 < m < M$, 所以 $0 < 1 - \frac{m}{M} < 1$, 于是结合所得不等式

$$d(T\varphi_1, T\varphi_2) \leq (1 - \frac{m}{M})d(\varphi_1, \varphi_2), \quad \forall \varphi_1,\ \varphi_2 \in C[a,b]$$

便知 $T\colon C[a,b] \to C[a,b]$ 是一个压缩映射. 又因 $(C[a,b], d)$ 是完备的度量空间, 从而(根据压缩映射原理)存在唯一的 $\varphi \in C[a,b]$ 满足 $T\varphi = \varphi$, 即

$$\varphi(x) - \frac{1}{M}F(x, \varphi(x)) = \varphi(x), \quad \forall x \in [a,b],$$

等价于

$$F(x, \varphi(x)) = 0, \quad \forall x \in [a,b].$$