

泛函分析讲义

王才士

西北师范大学数学与统计学院

Chap 7 度量空间和赋范线性空间

§4 完备度量空间

本节, 我们考察一类度量空间的共同属性 – 完备性. 回想, 对于度量空间 (X, d) 中的一个点列 $\{x_n\}$, 如果存在 $x \in X$, 使得 $x_n \rightarrow x$, 则称 $\{x_n\}$ 是 (X, d) 中的收敛点列, 简称在 (X, d) 中收敛.

定义1

设 (X, d) 是一个度量空间. 称 X 中的点列 $\{x_n\}$ 为Cauchy点列或基本点列如果对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $N = N(\epsilon)$, 使得当 $m, n > N$ 时, 必有 $d(x_m, x_n) < \epsilon$.

♣ 易证, 度量空间 (X, d) 中的每一个收敛点列都是Cauchy点列.

在一般度量空间中, Cauchy点列未必都是收敛点列. 这导致如下完备性的概念.

定义2

如果度量空间 (X, d) 中的每个Cauchy点列都是 (X, d) 中的收敛点列, 则称 (X, d) 是一个完备的度量空间, 简称 X 完备.

♣ 欧式空间 $\mathbb{R}^d$ 是一个完备的度量空间, 其中 $d \geq 1$ 为正整数. 特别的, 1-维欧式空间 $\mathbb{R}$ 是完备的度量空间(此即实数的完备性).

♣ 有理数集 $\mathbb{Q}$ 按绝对值距离构成一个度量空间, 但是这个空间不是完备的.

例1

l^∞ 是一个完备的度量空间.

其实, 如果 $\{x_n\}$ 是 l^∞ 中的一个Cauchy点列, 则 $\forall k \geq 1$, 有

$$|\xi_k^{(m)} - \xi_k^{(n)}| \leq d(x_m, x_n), \quad m, n \geq 1,$$

其中 $x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_k^{(n)}, \dots)$ 为分量表示. 由此可知, 对每个 $k \geq 1$, 数列 $\{\xi_k^{(n)}\}_{n \geq 1}$ 是一个Cauchy数列, 从而收敛. 令

$$x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots),$$

其中 $\xi_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_k^{(n)}$. 下证 $x \in l^\infty$ 且 $x_n \rightarrow x$.

首先, 取 $N_0 \geq 1$, 使 $d(x_m, x_n) < 1, \forall m, n > N_0$. 于是有

$$|\xi_k^{(n)}| \leq d(x_n, x_{N_0+1}) + |\xi_k^{(N_0+1)}| \leq 1 + M, \quad \forall n > N_0, \forall k \geq 1,$$

其中 $M = \sup_{k \geq 1} |\xi_k^{(N_0+1)}|$. 令 $n \rightarrow \infty$ 得 $|\xi_k| \leq 1 + M, \forall k \geq 1$, 说明 $x \in l^\infty$.

其次, $\forall \epsilon > 0$, 因 $\{x_n\}$ 是Cauchy点列, 故 $\exists N \geq 1$, 使得 $d(x_m, x_n) < \epsilon, \forall m, n > N$; 由此得

$$|\xi_k^{(m)} - \xi_k^{(n)}| < \epsilon, \quad \forall m, n > N, \forall k \geq 1;$$

令 $n \rightarrow \infty$ 得 $|\xi_k^{(m)} - \xi_k| \leq \epsilon, \forall m > N, \forall k \geq 1$; 关于指标 $k \geq 1$ 取上确界得 $d(x_m, x) = \sup_{k \geq 1} |\xi_k^{(m)} - \xi_k| \leq \epsilon, \forall m > N$. 从而证明了 $x_n \rightarrow x$.

设 M 是度量空间 (X, d) 的一个非空子集, 则 d 在 M 上的限制, 仍记做 d , 是 M 上的一个距离(即满足距离三公理). 因而 (M, d) 构成一个度量空间, 称之为 (X, d) 的子空间.

下一个定理给出的条件可用来方便地判断度量空间子空间的完备性.

定理1

设 (X, d) 是一个完备的度量空间, $M \subset X$ 为一个非空子集. 则子空间 (M, d) 完备的充分必要条件是 M 为 X 中的闭集.

♣ 请注意定理中的前提条件: (X, d) 是一个完备的度量空间.

以 C 表示全体收敛的实(或复)数列构成的集合. 在 C 上引入如下二元函数:

$$d(x, y) = \sup_{k \geq 1} |\xi_k - \eta_k|, \quad x = \{\xi_k\}, y = \{\eta_k\} \in C.$$

容易验证 (C, d) 构成一个度量空间.

例2

上述 (C, d) 是一个完备的度量空间

其实 $C \subset l^\infty$, 从而 (C, d) 是 (l^∞, d) 的子空间. 根据定理1, 只需验证 C 是 l^∞ 的闭集, 即 $\overline{C} \subset C$, 其中 $\overline{C}$ 为 C 在 l^∞ 中的闭包.

设 $x \in \overline{C}$, 往证 $x \in C$. 取 $\{x_n\} \subset C$ 使得 $d(x_n, x) \rightarrow 0$. 记

$$x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_k^{(n)}, \dots), \quad x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots).$$

$\forall \epsilon > 0$, 因 $d(x_n, x) \rightarrow 0$, 故 $\exists N \geq 1$, 使得 $d(x_N, x) < \frac{\epsilon}{3}$; 又由于

$$x_N = (\xi_1^{(N)}, \xi_2^{(N)}, \dots, \xi_k^{(N)}, \dots) \in C,$$

所以 $\{\xi_k^{(N)}\}_{k \geq 1}$ 是Cauchy数列, 从而 $\exists K \geq 1$ 使得对一切 $i, j > K$, 有 $|\xi_i^{(N)} - \xi_j^{(N)}| < \frac{\epsilon}{3}$; 于是, 对一切 $i, j > K$, 有

$$|\xi_i - \xi_j| \leq |\xi_i - \xi_i^{(N)}| + |\xi_i^{(N)} - \xi_j^{(N)}| + |\xi_j^{(N)} - \xi_j| < \epsilon.$$

这说明 $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$ 是收敛数列, 从而 $x \in C$. 总之 $\overline{C} \subset C$.

Diagram of the Relationships between x_N and x

$$x_N = (\xi_1^{(N)}, \dots, \xi_K^{(N)}, \dots, \xi_i^{(N)}, \dots, \xi_j^{(N)}, \dots)$$

$$\vdots$$

$$x_m = (\xi_1^{(m)}, \dots, \xi_K^{(m)}, \dots, \xi_i^{(m)}, \dots, \xi_j^{(m)}, \dots)$$

$$\vdots$$

$$x_n = (\xi_1^{(n)}, \dots, \xi_K^{(n)}, \dots, \xi_i^{(n)}, \dots, \xi_j^{(n)}, \dots)$$

$$\vdots$$

$$x = (\xi_1, \dots, \xi_K, \dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \dots)$$

其中 $N \leq m < n$, $K \leq i < j$.

例3

$C[a, b]$ 是一个完备的度量空间

证明: 设 $\{x_n\}$ 是 $C[a, b]$ 中的一个Cauchy点列, 往证 $\{x_n\}$ 在 $C[a, b]$ 中收敛. 对每个 $t \in [a, b]$, 因

$$|x_m(t) - x_n(t)| \leq \max_{a \leq s \leq b} |x_m(s) - x_n(s)| = d(x_m, x_n), \quad m, n \geq 1,$$

故 $\{x_n(t)\}$ 是一个Cauchy数列, 从而收敛. 现定义函数 $x(t)$ 如下:

$$x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t), \quad t \in [a, b].$$

下证 $x \in C[a, b]$ 且 $d(x_n, x) \rightarrow 0$.

$\forall \epsilon > 0$, 因 $\{x_n\}$ 为Cauchy点列, 故 $\exists N \geq 1$, 使得 $\forall m, n > N$, 成立 $d(x_m, x_n) < \epsilon$; 由此得

$$|x_m(t) - x_n(t)| < \epsilon, \quad \forall t \in [a, b], \forall m, n > N;$$

令 $n \rightarrow \infty$ 得

$$|x_m(t) - x(t)| \leq \epsilon, \quad \forall t \in [a, b], \forall m > N.$$

这说明函数列 $\{x_n(t)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于函数 $x(t)$. 从而 $x(t)$ 连续, 即 $x \in C[a, b]$.

重复上述过程, 我们还可以证明 $d(x_n, x) \rightarrow 0$. 综上, $\{x_n\}$ 在 $C[a, b]$ 中收敛.

例4

设 $P[a, b]$ 表示闭区间 $[a, b]$ 上全体实系数多项式构成的集合. 给 $P[a, b]$ 赋以最大模距离, 则 $P[a, b]$ 是一个度量空间, 但不完备.

其实, 上述 $P[a, b]$ 是 $C[a, b]$ 的一个子空间. 根据定理1, 度量空间 $P[a, b]$ 完备的充要条件是: $P[a, b]$ 是 $C[a, b]$ 的闭集.

可以证明: 存在多项式序列 $\{P_n(t)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于一个非多项式连续函数 $f(t)$. 此即: 存在点列 $\{P_n\} \subset P[a, b]$ 和点 $f \in C[a, b]$, 使 $P_n \rightarrow f$, 但 $f \notin P[a, b]$. 这说明 $P[a, b]$ 不是 $C[a, b]$ 的闭集, 从而度量空间 $P[a, b]$ 不完备.

设 X 表示闭区间 $[0, 1]$ 上的全体连续函数构成的集合. 在 X 上引入如下二元函数:

$$d(x, y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt, \quad x, y \in X.$$

容易验证 (X, d) 构成一个度量空间.

例5

上述度量空间 (X, d) 不完备.

我们需要证明: 存在 (X, d) 中的一个Cauchy点列, 该点列在 (X, d) 中不收敛.

定义区间 $[0, 1]$ 上的函数序列 $\{x_n(t)\}$ 如下:

$$x_n(t) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq t \leq 1; \\ n(t - \frac{1}{2}), & \frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} + \frac{1}{n}; \\ 0, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

显然 $\{x_n(t)\}$ 是 $[0, 1]$ 上的一列连续函数, 即 $\{x_n\} \subset X$. 易见, 当 $m, n \geq 1$ 时(不妨设 $m < n$), 有

$$d(x_m, x_n) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{m}} |x_m(t) - x_n(t)| dt \leq \frac{1}{m}.$$

从而 $\{x_n\}$ 是 (X, d) 中的一个Cauchy点列. 下面说明, 点列 $\{x_n\}$ 在 (X, d) 中不收敛.

用反证法. 反设 $\{x_n\}$ 在 (X, d) 中收敛, 则存在 $x \in X$ 使得 $d(x_n, x) \rightarrow 0$. 然而

$$d(x_n, x) = \int_0^{\frac{1}{2}} |x(t)| dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}} |x_n(t) - x(t)| dt + \int_{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}}^1 |1 - x(t)| dt,$$

且式中 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}} |x_n(t) - x(t)| dt \leq \frac{1}{n} (1 + \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|) \rightarrow 0$, 故令 $n \rightarrow \infty$ 可得 $0 = \int_0^{\frac{1}{2}} |x(t)| dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 |1 - x(t)| dt$, 此式意味着

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |x(t)| dt = 0, \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 |1 - x(t)| dt = 0.$$

上式意味着 $\lim_{t \rightarrow \frac{1}{2} - 0} x(t) = 0 \neq 1 = \lim_{t \rightarrow \frac{1}{2} + 0} x(t)$. 矛盾!