泛函分析讲义

王才士

西北师范大学数学与统计学院

Chap 7 度量空间和赋范线性空间

§2 度量空间中的极限及其它拓扑概念

类似于欧氏空间的情形, 度量空间中可以引进各种拓扑概念. 以下, 如无特别说明, 我们总假定 (X, d) 是一个给定的度量空间.

ε-邻域

设 $x_0 \in X$ 为度量空间 (X, d) 中的一点, $\varepsilon > 0$ 为一个正数. 定义

$$U(x_0, \varepsilon) = \{ x \in X \mid d(x, x_0) < \varepsilon \}.$$

称之为以 x_0 为中心、 ε 为半径的开球, 也可称之为点 x_0的 ε-邻域.

同样地, 还可以引进内点、外点、边界点和聚点, 以及导集、闭包、开集等概念.

例. 内点的定义

设 $M \subset X$ 为度量空间 X 的一个子集, $x_0 \in X$ 为 X 中的一点. 如果存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $U(x_0, \varepsilon) \subset M$, 则称点 x_0 为点集 M 的内点.

例. 开集的定义

设 $M \subset X$ 为度量空间 X 的一个子集. 称 M 为开集如果 M 的每个点都是它的内点.

根据这个定义, 作为度量空间 X 的子集, 空集 $\emptyset$ 是一个开集.

例. 极限的定义

设 $\{x_n\}$ 是度量空间 X 中的一个点列. 如果存在 $x \in X$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0,$$

则称点列 $\{x_n\}$ 为 X 中的收敛点列(简称在中 X 收敛), 并 x 称为点列 $\{x_n\}$ 的极限, 记作 $x_n \to x$.

例. 有界集的定义

设 $M \subset X$, 即 M 是度量空间 X 的一个子集. 若

$$\delta(M) \triangleq \sup\{d(x,y) \mid x,\ y \in M\} < \infty,$$

则称 M 为度量空间 X 中的有界集, 其中 $\delta(M)$ 称为 M 的直径.

♠ 点集 $M \subset X$ 是有界集的充分必要条件是存在 $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$ 使 $M \subset U(x_0, \varepsilon)$.

♠ 若 $\{x_n\}$ 是度量空间 X 中的收敛点列, 则 $\{x_n\}$ 构成的点集是是 X 中的有界集.

♠ 需要注意的是, 在一般度量空间中有界点列未必是收敛的.

♠ 闭集的定义一般是借助于聚点的概念给出的. 在度量空间中还可以利用点列给出闭集的定义

例. 闭集的分析定义

点集 $M \subset X$ 为闭集的充分必要条件是若 $\{x_n\} \subset M$ 且 $x_n \to x$, 则 $x \in M$.

如同度量空间本身一样, 度量空间中点列的收敛是一个高度抽象的概念. 在具体空间中, 点列的收敛往往具有其具体意义.

欧式空间中收敛的具体意义

设 $\mathbb{R}^d$ 为 d-维欧式空间, $\{x_n\}$ 是其中的一个点列, $x \in \mathbb{R}^d$. 容易验证: 点列 $\{x_n\}$ 按欧式距离收敛于 $x \iff$ 对于每个 $1 \le k \le d$, 有 $\xi_k^{(n)} \to \xi_k \ (n \to \infty)$, 其中

$$x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(2)}, \cdots, \xi_d^{(n)}), \quad x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_d).$$

可见, 欧式空间中点列的收敛等价于按坐标(或分量)的收敛.

$C[a,b]$ 空间中收敛的具体意义

设 $\{x_n\}$ 是 $C[a,b]$ 中的一个点列, $x \in C[a,b]$. 容易验证: 点列 $\{x_n\}$ 按 $C[a,b]$ 中的最大模距离收敛于 $x \iff$ 函数列 $\{x_n(t)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 $x(t)$.

♣ 函数列 $\{x_n(t)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 $x(t)$ 是指: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \geq 1$ 使得对一切 $n > N$ 和一切 $t \in [a,b]$ 成立

$$|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon.$$

(参见数学分析教材)

序列空间 S 中收敛的具体意义

设 $\{x_n\}$ 是序列空间 S 中的一个点列, $x \in S$. 则点列 $\{x_n\}$ 按 S 中的距离收敛于 $x \iff \{x_n\}$ 按坐标(或分量)收敛于 x, 即对于每个 $k \geq 1$, 有 $\xi_k^{(n)} \to \xi_k \ (n \to \infty)$, 其中

$$x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(2)}, \cdots, \xi_k^{(n)}, \cdots), \quad x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k, \cdots).$$

♣ 为证明上述结论, 我们需要利用如下关于数列收敛性的一个有用结果: 数列 $\{a_n\}$ 收敛于数 a 的充分必要条件是 $\frac{|a_n-a|}{1+|a_n-a|} \to 0$. (请自证!)

设 $X \subset \mathbb{R}^d$ 是一个非空的L可测集, 并且 $m(X) < \infty$. 以 $\mathfrak{M}(X)$ 表示定义在 X 上的全体实值L可测函数构成的集合, 并赋以如前一节所示的距离.

$\mathfrak{M}(X)$ 中收敛的具体意义

设 $\{f_n\}$ 是可测函数空间 $\mathfrak{M}(X)$ 中的一个点列, $f \in \mathfrak{M}(X)$. 则点列 $\{f_n\}$ 按 $\mathfrak{M}(X)$ 中的距离收敛于 $f \iff$ 函数列 $\{f_n\}$ 在 X 上依测度收敛于函数 f, 即: $\forall\, \sigma > 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} m\big(X[|f_n - f| \geq \sigma]\big) = 0.$$

证明上述结论, 需要如下关于可测函数的L积分的两个重要不等式.

引理

设 $X \subset \mathbb{R}^d$ 是一个非空的L可测集, 并且 $m(X) < \infty$. 若 f, $g \in \mathfrak{M}(X)$, 则对任意 $\sigma > 0$ 成立:

$$\int_X \frac{|f(t) - g(t)|}{1 + |f(t) - g(t)|} dt \leq m(X[|f - g| \geq \sigma]) + \frac{\sigma}{1 + \sigma} m(X),$$

$$m(X[|f - g| \geq \sigma]) \leq \frac{1 + \sigma}{\sigma} \int_X \frac{|f(t) - g(t)|}{1 + |f(t) - g(t)|} dt.$$

从上述例子可以看到, 尽管许多种收敛的具体方式和意义不同, 但当我们引入适当的距离后, 都可以统一在度量空间中的收敛框架之内.

为了深入揭示度量空间的拓扑属性, 我们下面引入点集的稠密性概念和可分性概念.

定义

- 设 M, E 是度量空间 X 的两个子集. 若 M 的闭包含 E, 即 $\overline{M} \supset E$, 则称点集 M 在点集 E 中稠密.
- 若 M 在度量空间 X 中稠密, 则称 M 为 X 的稠密子集.
- 若度量空间 X 有一个稠密子集, 则称 X 是可分的.

例1

欧式空间 $\mathbb{R}^d$ 是可分的. 其实, $\mathbb{R}^d$ 中的全体有理点构成的点集 $\mathbb{Q}^d$ 就是 $\mathbb{R}^d$ 的一个可数稠密子集.

♣ 一个点 $x \in \mathbb{R}^d$ 称为有理点如果它的每个坐标都是有理数.

例2

离散度量空间 X 可分的充分必要条件是 X 本身是可数集合. 其实, X 的每个子集都是闭集, 因而 X 的稠密子集只有其本身. 由此可知, X 可分的充分必要条件是 X 本身是可数集.

例3 l^∞ 的不可分性

以 l^∞ 表示全体有界实(或复)数列构成的集合. 在 l^∞ 中可以引进如下距离使之成为度量空间:

$$d(x,y)=\sup_{k\geq 1}|\xi_k-\eta_k|,$$

其中 $x, y\in l^\infty$ 的分量表示如下

$$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,\cdots),\quad y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k,\cdots).$$

结论: 度量空间 l^∞ 是不可分的.