

泛函分析讲义

王才士

西北师范大学数学与统计学院

Chap 7 度量空间和赋范线性空间

§1 度量空间

极限是数学分析中的基本概念之一. 本节我们将展示极限概念可以推广到更一般的结构, 即度量空间(metric space).

定义1

设 X 为一非空集合, $d = d(\cdot, \cdot)$ 是 X 上的一个二元函数. 若 d 满足: 对任意 $x, y, z \in X$, 成立

- ① 正定性: $d(x, y) \geq 0$ 并且 $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$;
- ② 对称性: $d(x, y) = d(y, x)$;
- ③ 三角不等式: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$,

则称 $d = d(\cdot, \cdot)$ 是 X 上的一个距离, 并称 (X, d) 为度量空间.

♠ 度量空间也称为距离空间, 其元素通常叫做点. 设 x, y 是度量空间 (X, d) 中的两个点, 则称 $d(x, y)$ 为 x 与 y 之间的距离.

♠ 定义1中的条件1、条件2和条件3常称为距离三公理, 其中条件2和条件3 也可用下一个条件来代替:

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z), \quad \forall x, y, z \in X.$$

♠ 在 $\mathbb{R}^d$ 中, 如下定义的二元函数是一个距离(称为欧氏距离):

$$d(x, y) = \sqrt{(s_1 - t_1)^2 + (s_2 - t_2)^2 + \cdots + (s_d - t_d)^2},$$

其中 $x = (s_1, s_2, \cdots, s_d), y = (t_1, t_2, \cdots, t_d) \in \mathbb{R}^d$.

例1 离散度量空间

设 X 为一非空集合, 定义 X 上的二元函数 $d = d(\cdot, \cdot)$ 如下:

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \neq y; \\ 0, & \text{当 } x = y. \end{cases}$$

其中 $x, y \in X$. 容易验证 $d = d(\cdot, \cdot)$ 是 X 上的一个距离(即满足定义1中的三个条件), 从而 (X, d) 构成一个度量空间(称为离散度量空间).

此例表明, 任意非空集合上总可以定义一个距离, 使之成为一个度量空间. 值得指出的是, 离散度量空间的每一个子集都是它的开集. 这样的度量空间并无多少实际用处.

例2 序列空间 S

设 S 表示全体实数数列构成的集合(或全体复数数列构成的集合), 定义 S 上的二元函数 $d = d(\cdot, \cdot)$ 如下:

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|}, \quad x, y \in S,$$

其中 $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k, \dots)$. 则 d 是 S 上的一个距离, 从而 (S, d) 构成一个度量空间, 称为**序列空间**.

其实, $d(\cdot, \cdot)$ 显然满足正定性条件和对称性条件(即定义1中的条件1和条件2). 下面验证它也满足三角不等式, 为此我们首先证明一个分式不等式.

引理 分式型绝对值不等式

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$

其中 a, b 为任意两个复数.

其实, 函数 $f(t) = \frac{t}{1+t}$ 是区间 $[0, \infty)$ 上的一个增函数(请自行验证!). 由于 $|a+b| \leq |a| + |b|$, 所以

$$\begin{aligned} \frac{|a+b|}{1+|a+b|} &\leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \\ &= \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}. \end{aligned}$$

现在设 $x, y, z \in S$ 并且

$$x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots),$$

$$y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k, \dots),$$

$$z = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k, \dots).$$

则由不等式 $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$ 可得

$$\begin{aligned} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|} &= \frac{|(\xi_k - \zeta_k) + (\zeta_k - \eta_k)|}{1 + |(\xi_k - \zeta_k) + (\zeta_k - \eta_k)|} \\ &\leq \frac{|\xi_k - \zeta_k|}{1 + |\xi_k - \zeta_k|} + \frac{|\zeta_k - \eta_k|}{1 + |\zeta_k - \eta_k|}, \end{aligned}$$

其中 $k = 1, 2, \dots$.

给上述不等式两端分别乘以因子 $\frac{1}{2^k}$ 然后求和得

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \zeta_k|}{1 + |\xi_k - \zeta_k|} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\zeta_k - \eta_k|}{1 + |\zeta_k - \eta_k|},$$

即

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

这样我们便验证了上述 (S, d) 是一个度量空间.

♠ 有趣的是, 在序列空间 (S, d) 上总成立

$$d(x, y) \leq 1, \quad \forall x, y \in S.$$

这表明序列空间 (S, d) 本身是有界的(见后面章节的有关讨论).

例3 有界函数空间 $B(\Omega)$

设 Ω 是一个非空集合, 以 $B(\Omega)$ 表示 Ω 上的全体实值函数(或复值函数)构成的集合. 定义 $B(\Omega)$ 上的二元函数 $d = d(\cdot, \cdot)$ 如下:

$$d(f, g) = \sup_{\omega \in \Omega} |f(\omega) - g(\omega)|, \quad f, g \in B(\Omega).$$

则 d 是 $B(\Omega)$ 上的一个距离, 从而 $(B(\Omega), d)$ 构成一个度量空间, 称为有界函数空间.

利用上确界的性质容易看出, d 具有正定性和对称性, 结合绝对值(或模)的性质可进一步看出 d 满足三角不等式.

♠ 当 $\Omega = [a, b]$ 时, 我们将 $B(\Omega)$ 改记为 $B[a, b]$.

例4 可测函数空间 $\mathfrak{M}(X)$

设 $X \subset \mathbb{R}^n$ 是一个非空的L可测集, 并且 $m(X) < \infty$. 以 $\mathfrak{M}(X)$ 表示定义在 X 上的全体实值(或复值)L可测函数构成的集合. 对于 $f, g \in \mathfrak{M}(X)$, 当 $f(t) = g(t)$ a.e.于 X 时, 规定 $f = g$. 在 $\mathfrak{M}(X)$ 上定义如下二元函数:

$$d(f, g) = \int_X \frac{|f(t) - g(t)|}{1 + |f(t) - g(t)|} dt, \quad f, g \in \mathfrak{M}(X).$$

则 d 是 $\mathfrak{M}(X)$ 上的一个距离, 从而 $(\mathfrak{M}(X), d)$ 构成一个度量空间, 称为可测函数空间.

上述二元函数 $d(\cdot, \cdot)$ 显然满足正定性和对称性. 利用不等式 $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$ 还可以证明 $d(\cdot, \cdot)$ 满足三角不等式.

例5 $C[a, b]$ 空间

以 $C[a, b]$ 表示定义在区间 $[a, b]$ 上的全体实值(或复值)连续函数构成的集合. 在 $C[a, b]$ 上定义如下二元函数:

$$d(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|, \quad x, y \in C[a, b].$$

则 d 是 $C[a, b]$ 上的一个距离, 从而 $(C[a, b], d)$ 构成一个度量空间, 称为 **连续函数空间**.

♠ 文献中常把上述距离叫做 $C[a, b]$ 上的 **最大模距离**. 后面我们将会看到, $C[a, b]$ 上还可以引进其它形式的重要距离, 如著名的 L^p 距离.

设 $x = \{x_k\}$ 是一个实数数列. 称 $x = \{x_k\}$ 是平方可和的如果其平方和有限, 即 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$.

例6 l^2 空间

以 l^2 表示全体平方可和的实数数列构成的集合. 在 l^2 上定义二元函数 $d = d(\cdot, \cdot)$ 如下:

$$d(x, y) = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

其中 $x = \{x_k\}, y = \{y_k\} \in l^2$. 则 d 是 l^2 上的一个距离, 从而 (l^2, d) 构成一个度量空间, 称为 l^2 空间.

只验证三角不等式. 为此设 $x = \{x_k\}$, $y = \{y_k\}$, $z = \{z_k\} \in l^2$.

对于 $n \geq 1$, 以 $d^{(n)}$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的欧氏距离, 并且取

$$x^{(n)} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad y^{(n)} = (y_1, y_2, \dots, y_n), \quad z^{(n)} = (z_1, z_2, \dots, z_n),$$

则 $x^{(n)}, y^{(n)}, z^{(n)} \in \mathbb{R}^n$, 从而有

$$d^{(n)}(x^{(n)}, y^{(n)}) \leq d^{(n)}(x^{(n)}, z^{(n)}) + d^{(n)}(z^{(n)}, y^{(n)}) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

令 $n \rightarrow \infty$, 并且注意到 $d^{(n)}(x^{(n)}, y^{(n)}) \rightarrow d(x, y)$, 使得

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

这说明 d 满足三角不等式.