泛函分析讲义

王才士

2011年6月

§6 逆算子定理

本节我们介绍另一个基本定理—逆算子定理, 并介绍与其相关的其它重要命题. 首先做一些必要的准备.

赋范线性空间中子集的直接和、差以及数乘运算

设 X 是赋范线性空间, $A, B \subset X$ 是非空子集, $w \in X$ 为给定的向量, λ 为给定的数. 规定:

1. $A \pm B = \{x \pm y \mid x \in A,\ y \in B\}$, 特别地 $A \pm w = A \pm \{w\}$;
2. $\lambda A = \{\lambda x \mid x \in A\}$.

可分别称 $A + B$, $A - B$, λA 为直接和、直接差、数乘.

在赋范线性空间中, 子集的直接和、差以及数乘运算有许多有趣的性质.

子集的直接和、差以及数乘运算的性质

设 X, Y 是赋范线性空间, $A, B \subset X$ 是非空子集, x_0, $w \in X$ 为给定的向量, $\lambda > 0$ 为给定的数. 则有:

1. $\overline{A+B} \supset \overline{A} + \overline{B}$, $\overline{\lambda A} = \lambda \overline{A}$, $\overline{A+w} = \overline{A} + w$;
2. $U(x_0, r) = U(x_0, \frac{1}{2}r) \pm U(x_0, \frac{1}{2}r)$, 其中 $r > 0$;
3. $\lambda U(x_0, r) = U(\lambda x_0, \lambda r)$, $U(x_0, r) + w = U(x_0 + w, r)$;
4. 特别地 $U(x_0, r) = rU(0, 1) + x_0$, 其中 $r > 0$;
5. 当 $T\colon X \mapsto Y$ 为线性算子时, 有 $T(A \pm B) = T(A) \pm T(B)$;
6. 当 $T\colon X \mapsto Y$ 为有界线性算子时, 有 $T(\overline{A}) \subset \overline{T(A)}$.

引理1

设 X 和 Y 是Banach空间, $T\colon X\mapsto Y$ 是一个有界线性算子. 若 T 是满射, 即 $T(X)=Y$, 则存在 $\delta>0$ 使得

$$T\big(U_X(0,1)\big)\supset U_Y(0,\delta), \tag{1}$$

即 $T\big(U_X(0,1)\big)$ 以 Y 空间的 0 向量为内点.

证明

证明分三步进行. 第一步, 我们证明存在 $y_0\in Y$ 和 $\epsilon>0$ 使得

$$\overline{T\big(U_X(0,\tfrac{1}{2})\big)}\supset U_Y(y_0,\epsilon). \tag{2}$$

证明(续)

其实

$$Y = T(X) = \bigcup_{k=1}^{\infty} T\big(U_X(0,k)\big).$$

由于 Y 完备, 所以必有某个 $T\big(U_X(0,k)\big)$ 不是无处稠密集, 从而有 $y_1 \in Y$ 和 $\epsilon_1 > 0$ 使得 $T\big(U_X(0,k)\big)$ 在 $U_Y(y_1,\epsilon_1)$ 中稠密, 这等价于

$$\overline{T\big(U_X(0,k)\big)} \supset U_Y(y_1,\epsilon_1). \tag{3}$$

记 $y_0 = \frac{1}{2k}y_1$, $\epsilon = \frac{1}{2k}\epsilon_1$, 并在(3)式两端同乘以 $\frac{1}{2k}$ 便得(6)式.

第二步, 我们证明

$$\overline{T\big(U_X(0,1)\big)} \supset U_Y(0,\epsilon). \tag{4}$$

证明(续)

其实, 由公式 $U_X(0,1) = U_X(0,\frac{1}{2}) - U_X(0,\frac{1}{2})$ 可得

$$\begin{aligned}
\overline{T\big(U_X(0,1)\big)} &= \overline{T\big(U_X(0,\tfrac{1}{2}) - U_X(0,\tfrac{1}{2})\big)} \\
&= \overline{T\big(U_X(0,\tfrac{1}{2})\big) - T\big(U_X(0,\tfrac{1}{2})\big)} \\
&\supset \overline{T\big(U_X(0,\tfrac{1}{2})\big)} - \overline{T\big(U_X(0,\tfrac{1}{2})\big)} \\
&\supset U_Y(y_0,\epsilon) - U_Y(y_0,\epsilon) \\
&\supset U_Y(y_0,\epsilon) - y_0 \\
&= U_Y(0,\epsilon).
\end{aligned}$$

推导中用到了第一步得到的包含关系 $\overline{T\big(U_X(0,\frac{1}{2})\big)} \supset U_Y(y_0,\epsilon)$.

证明(续)

第三步, 我们证明存在 $\delta > 0$ 使得(6)式成立. 其实, 在(4)式两端同乘以 $\frac{1}{2^n}$ 便可得包含关系序列:

$$\overline{T\big(U_X(0, \tfrac{1}{2^n})\big)} \supset U_Y(0, \tfrac{\epsilon}{2^n}), \quad n \geq 0. \tag{5}$$

设 $y \in U_Y(0, \epsilon)$. 则由(5)式知 $y \in \overline{T\big(U_X(0, 1)\big)}$, 因而有 $x_1 \in U_X(0, 1)$ 使

$$\|y - Tx_1\| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{即 } y - Tx_1 \in U_Y(0, \tfrac{\epsilon}{2}).$$

根据(5)式 $y - Tx_1 \in \overline{T\big(U_X(0, \frac{1}{2})\big)}$, 因而有 $x_2 \in U_X(0, \frac{1}{2})$ 使

$$\|y - Tx_1 - Tx_2\| < \frac{\epsilon}{2^2}, \quad \text{即 } y - Tx_1 - Tx_2 \in U_Y(0, \tfrac{\epsilon}{2^2}).$$

证明(续)

同理有 $x_3 \in U_X(0, \frac{1}{2^2})$ 使

$$\|y - Tx_1 - Tx_2 - Tx_3\| < \frac{\epsilon}{2^3}.$$

$\cdots\cdots$

如此下去, 我们得到 X 中的向量序列 $\{x_n\}$ 满足

1. $x_n \in U_X(0, \frac{1}{2^{n-1}}), n \geq 1;$
2. $\|y - \sum_{k=1}^{n} Tx_k\| < \frac{\epsilon}{2^n}, n \geq 1$ (从而 $y = \sum_{n=1}^{\infty} Tx_n$).

考虑向量级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. 易见

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2.$$

证明(续)

由于 X 完备, 所以向量级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛. 记 $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, 则

$$\|x\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \leq 2 < 3 \quad \text{从而} x \in U_X(0,3).$$

又由于 T 是有界线性算子, 所以有

$$Tx = T\Big(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} Tx_n = y.$$

这表明 $y = Tx \in T\big(U_X(0,3)\big)$. 由 $y \in U_Y(0,\epsilon)$ 的任意性便知

$$U_Y(0,\epsilon) \subset T\big(U_X(0,3)\big) \iff T\big(U_X(0,1)\big) \supset U_Y(0,\delta)$$

其中 $\delta = \frac{\epsilon}{3}$.

定义1

设 X 和 Y 是度量空间, $T: X \mapsto Y$ 是一个映射. 若 T 把 X 中的开集变成 Y 中的开集(即对任意开集 $G \subset X$, 其像 $T(G) \subset Y$ 也是开集), 则称 T 是一个开映射.

定理1

设 X 和 Y 是Banach空间, $T: X \mapsto Y$ 是一个有界线性算子. 若 T 是满射, 则 T 必为开映射.

其实, 若 $G \subset X$ 为开集, 则 $G = \bigcup_{x \in G} U_X(x, \theta_x)$, 于是有

$$T(G) = \bigcup_{x \in G} T\big(U_X(x, \theta_x)\big) \supset \bigcup_{x \in G} U_Y\big(Tx, \delta\theta_x\big) \supset T(G),$$

由此得 $T(G) = \bigcup_{x \in G} U_Y\big(Tx, \delta\theta_x\big)$, 可见 $T(G)$ 也是开集.

定理2

设 X 和 Y 是Banach空间, $T\colon X \mapsto Y$ 是一个有界线性算子. 若 T 是双射, 则其逆映射 $T^{-1}\colon Y \mapsto X$ 也是有界线性算子.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\text{operator } T"] & Y \arrow[d, "I_Y"] \\
X \arrow[u, "I_X"] & Y \arrow[l, "\text{the inverse } T^{-1}"']
\end{tikzcd}
\tag{6}
$$

定理3

设 X 是一个线性空间, $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是 X 上的两个范数, 使得 $(X, \|\cdot\|_1)$ 和 $(X, \|\cdot\|_2)$ 都是Banach空间. 若有正数 $C > 0$ 使得 $\|\cdot\|_2 \leq C\|\cdot\|_1$, 则必有正数 $C' > 0$ 使得$\|\cdot\|_1 \leq C'\|\cdot\|_2$.