泛函分析讲义

王才士

2011年6月

§5 强收敛、弱收敛和一致收敛

本节我们介绍与赋范线性空间有关的几种收敛概念. 我们将会看到这些概念体现了数学家们的思维差异.

定义1

设 X 是赋范线性空间, $\{x_n\}$ 是 X 中的向量序列. 以 X' 表示 X 的共轭空间.

1. 若有 $x \in X$, 使得 $\|x_n - x\| \to 0$ $(n \to \infty)$, 则称向量序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 x;
2. 若有 $x \in X$, 使得对任意 $f \in X'$, 都有 $f(x_n) \to f(x)$ $(n \to \infty)$, 则称向量序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x.

♠ 在赋范线性空间中, 向量序列的强收敛就是按范数收敛.

♠ 显然, 强收敛蕴含弱收敛, 但弱收敛的未必强收敛.

例1

设 $X = l^2$, 考虑序列 $\{e_n\}$, 其中 $e_n = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$. 任取 $f \in X'$, 由Riesz表示定理存在 z_f 使得 $f(x) = \langle x, z_f \rangle$, $x \in X$. 因 $\{e_n\}$ 是 X 的标准正交基, 故

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(e_n)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, z_f \rangle|^2 = \|z_f\|^2$$

由此得 $f(e_n) \to 0 = f(0)$, $(n \to \infty)$. 可见 $\{e_n\}$ 弱收敛于零向量 0. 但是 $\|e_n - 0\| = 1, \forall n \geq 1$, 故 $\{e_n\}$ 不强收敛于零向量 0.

定义2

设 X 是赋范线性空间, X' 表示 X 的共轭空间, $\{f_n\} \subset X'$ 是泛函序列.

1. 若有 $f \in X'$, 使得 $\|f_n - f\| \to 0$ $(n \to \infty)$, 则称泛函序列 $\{f_n\}$ 强收敛于泛函 f;
2. 若有 $f \in X'$, 使得对任意 $x \in X$, 都有 $f_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$, 则称泛函序列 $\{f_n\}$ 弱*收敛于泛函 f;
3. 若有 $f \in X'$, 使得对任意 $F \in (X')'$, 都有 $F(f_n) \to F(f)$ $(n \to \infty)$, 则称泛函序列 $\{f_n\}$ 弱收敛于泛函 f.

♠ 对于泛函序列, 下列蕴含关系成立: 强收敛 $\Rightarrow$ 弱收敛 $\Rightarrow$ 弱*收敛.

设 X 是赋范线性空间, 则有影射 $J: X \mapsto (X')'$ 满足:

$$J(x) = F_x, \quad x \in X. \tag{1}$$

其中, $F_x \in (X')'$ 由下式定义: $F_x(f) = f(x), \quad f \in X'$.

自然嵌入映射、自反性

设 X 是赋范线性空间, 则由(1)式所定义的映射 $J: X \mapsto (X')'$ 是保持范数的线性算子, 称之为 X 到 $(X')'$ 的自然嵌入映射.

若自然嵌入映射 $J: X \mapsto (X')'$ 还是满射, 即 $J(X) = (X')'$, 则称 X 是自反的.

♠ Hilbert空间是自反的. 当 $p > 1$ 时, $L^p[a, b]$ 也是自反的.

命题1

设赋范线性空间 X 是自反的, $\{f_n\} \subset X'$ 是泛函序列, $f \in X'$. 则: $\{f_n\}$ 弱*收敛于 $f \Longleftrightarrow \{f_n\}$ 弱收敛 f.

由前面的讨论知: $\{f_n\}$ 弱收敛 $f \Longrightarrow \{f_n\}$ 弱*收敛于 f. 下证: 相反的蕴含关系也成立.

其实, 若 $\{f_n\}$ 弱*收敛于 f, 则由 X 的自反性知对每个 $F \in (X')'$, 对应地有 $x \in X$ 满足 $J(x) = F$, 其中 J 为 X 到 $(X')'$ 的自然嵌入映射, 于是

$$F(f_n) = f_n(x) \to f(x) = F(f) \quad (n \to \infty).$$

这表明 $\{f_n\}$ 弱收敛于 f.

定义3

设 X, Y 是赋范线性空间, $\{T_n\} \subset \mathcal{B}(X \mapsto Y)$ 是有界算子序列, $T \in \mathcal{B}(X \mapsto Y)$ 是有界算子.

1. 若 $\|T_n - T\| \to 0\ (n \to \infty)$, 则称算子序列 $\{T_n\}$ 一致收敛于算子 T;
2. 若对任意 $x \in X$, 都有 $\|T_n x - Tx\| \to 0\ (n \to \infty)$, 则称算子序列 $\{T_n\}$ 强收敛于算子 T;
3. 若对任意 $x \in X$ 和任意 $f \in Y'$, 都有 $f(T_n x) \to f(Tx)\ (n \to \infty)$, 则称算子序列 $\{T_n\}$ 弱收敛于算子 T.

♠ 显然, 对于算子序列来说, 一致收敛 $\Rightarrow$ 强收敛 $\Rightarrow$ 弱收敛.

例2

取 $X=Y=l^2$, 考虑算子序列 $\{T_n\}\subset\mathcal{B}(X\mapsto Y)$, 其中

$$T_n(\xi_1,\xi_2,\cdots)=\big(\underbrace{0,0,\cdots,0}_{n\text{ zeros}},\xi_{n+1},\xi_{n+2},\cdots\big),$$

其中 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^2$. 可以验证, 算子序列 $\{T_n\}$ 强收敛于零算子, 但不一致收敛于零算子.

例3

取 $X = Y = l^2$, 考虑算子序列 $\{S_n\} \subset \mathcal{B}(X \mapsto Y)$, 其中

$$S_n(\xi_1, \xi_2, \cdots) = (\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{n \text{ zeros}}, \xi_1, \xi_2, \cdots),$$

其中 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \in l^2$. 可以验证, 算子序列 $\{T_n\}$ 弱收敛于零算子, 但不强收敛于零算子.

定理2

设 X, Y 是Banach空间, $\{T_n\} \subset \mathcal{B}(X \mapsto Y)$ 是算子序列. 则 $\{T_n\}$ 强收敛的充分必要条件是:

1. $\{\, \|T_n\| \,\}$ 有界;
2. 有稠密子集 $D \subset X$ 使得对每个 $x \in D$, 向量序列$\{\, T_n x \,\}$ 在 Y 中强收敛.