泛函分析讲义

王才士

2011年6月

Chap 10 Banach 空间中的基本定理

§4 纲定理和一致有界原理

本节我们将介绍Banach空间中的第二个基本定理, 即关于有界算子族的一致有界原理. 该原理由Banach和Steinhaus于1927年建立, 是Banach空间空间理论的基石之一.

定义1

设 X 是一个度量空间, $M \subset X$ 是一个子集. 若 M 不在任何一个半径大于零的开球中稠密, 则称 M 是 X 中的无处稠密集或疏朗集.

♠ 容易验证, 在度量空间中子集 M 是无处稠密集的充分必要条件是其闭包 $\bar{M}$ 无内点.

♠ 容易验证, 在度量空间中有限子集(包括空集)都是无处稠密集.

定义2

设 X 是一个度量空间, $S \subset X$ 是一个子集. 若 S 可表示为有限或可数多个无处稠密集的并集, 则称 S 为第一纲集(set of the first category)或属于第一纲. 不属于第一纲的子集称为第二纲集(set of the second category).

♠ $\{X \text{ 的子集}\} = \{X \text{ 的第一纲集}\} \bigcup \{X \text{ 的第二纲集}\}$.

定理1 (Baire 纲定理)

若 X 是非空的完备度量空间, 则 X 是第二纲集.

定理2 (一致有界原理)

设 X 是Banach空间, Y 是赋范线性空间, $T_\theta \colon X \mapsto Y$, $\theta \in \Lambda$ 是一族有界线性算子(Λ 为指标集). 若对每个向量 $x \in X$, 都有

$$\sup\left\{\|T_\theta x\| \; ; \; \theta \in \Lambda\right\} < \infty, \tag{1}$$

则必有

$$\sup\left\{\|T_\theta\| \; ; \; \theta \in \Lambda\right\} < \infty. \tag{2}$$

其中指标集 Λ 可为有限集, 也可为无限集(包括可数和不可数).

♠ 定理2表明: 若对每个向量 $x \in X$, 向量集 $\{T_\theta x\}_{\theta\in\Lambda}$ 是 Y 中的有界集, 则算子集 $\{T_\theta\}_{\theta\in\Lambda}$ 是算子空间 $\mathcal{B}(X \mapsto Y)$ 中的有界集. 故称一致有界原理. 也有些中文文献将此定理称为共鸣定理.

证明

定义 X 上的泛函 $M(x)$ 如下

$$M(x) = \sup\left\{\|T_\theta x\| \,;\, \theta \in \Lambda\right\}, \quad x \in X. \tag{3}$$

易见, 对每个 $\theta \in \Lambda$, 成立 $\|T_\theta x\| \leq M(x)$, $\forall x \in X$. 对每个正整数 n, 定义向量集 S_n 如下

$$S_n = \{x \in X \mid M(x) \leq n\}.$$

容易看出每个 S_n 都是闭集, 并且它们的并集恰为空间 X, 即

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n.$$

因 X 完备, 故由Baire纲定理可知必有某个 S_N 不是无处稠密集.

证明(续)

因 S_N 不是无处稠密集, 故有某个开球 $U(x_0,\delta)$ $(\delta>0)$ 使得 S_N 在 $U(x_0,\delta)$ 中稠密, 等价于 $U(x_0,\delta)\subset\overline{S_N}=S_N$. 因此有

$$M(x)\le N,\quad \forall\, x\in U(x_0,\delta).$$

任取 $\theta\in\Lambda$. 则对于 $x\in X$ 且 $\|x\|=1$, 有

$$\begin{aligned}
\|T_\theta x\| &= \frac{2}{\delta}\left\|T_\theta\left(\frac{\delta}{2}x+x_0\right)-T_\theta x_0\right\| \\
&\le \frac{2}{\delta}\left[\left\|T_\theta\left(\frac{\delta}{2}x+x_0\right)\right\|+\|T_\theta x_0\|\right] \\
&\le \frac{2}{\delta}\left[M\left(\frac{\delta}{2}x+x_0\right)+M(x_0)\right] \\
&\le \frac{2N}{\delta}.
\end{aligned}$$

证明(续)

因此

$$\|T_\theta\| = \sup\{\|T_\theta x\| \ ; \ \|x\| = 1, \, x \in X\} \leq \frac{2N}{\delta}.$$

由于 $\theta \in \Lambda$ 是任取的, 所以

$$\sup\left\{\|T_\theta\| \ ; \ \theta \in \Lambda\right\} \leq \frac{2N}{\delta}.$$

定理得证.

在定理2中, 取 Y 为 X 所在的数域, 则立得如下关于连续线性泛函族的一致有界原理.

定理3

设 X 是Banach空间, $\{f_\theta\}_{\theta\in\Lambda}$ 是 X 上的一族连续线性泛函. 若对于每个向量 $x\in X$, 作为数集 $\{f_\theta(x)\}_{\theta\in\Lambda}$ 是有界集, 则泛函族 $\{f_\theta\}_{\theta\in\Lambda}$ 是共轭空间 X' 中的有界集, 即

$$\sup\left\{\|f_\theta\|\ ;\ \theta\in\Lambda\right\}<\infty. \tag{4}$$

推论1

设 H 是Hilbert空间, $S\subset H$ 是一非空子集. 若对于每个向量 $x\in X$, 数集 $\langle S,x\rangle \overset{\text{def}}{=} \{\langle u,x\rangle \mid u\in S\}$ 有界, 则 S 是 H 中的有界集.

定理4

设 X 是Banach空间, Y 是赋范线性空间, $T_n\colon X \mapsto Y$, $n \geq 1$ 是一列有界算子. 若对每个 $x \in X$, 序列 $\{T_n x\}$ 在 Y 中收敛, 则存在有界算子 $T\colon X \mapsto Y$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n x - Tx\| = 0, \quad \forall x \in X. \tag{5}$$

证明

对每个 $x \in X$, 因 $\{T_n x\}$ 在 Y 中收敛, 故 $\{T_n x\}$ 在 Y 中有界. 于是由一致有界原理知 $M = \sup\left\{\|T_n\|\ ;\ n \geq 1\right\} < \infty$. 定义映射 $T\colon X \mapsto Y$ 如下:

证明(续)

$$Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x, \quad x \in X.$$

容易验证 $T: X \mapsto Y$ 是线性算子. 下证其有界性. 其实对每个 $x \in X$, 因

$$\|T_n x\| \le \|T_n\|\|x\| \le M\|x\|, \quad n \ge 1,$$

故取极限得

$$\|Tx\| \le M\|x\|.$$

这表明 $T: X \mapsto Y$ 还是有界的. 由 T 定义知(5)式成立.