

泛函分析讲义

王才士

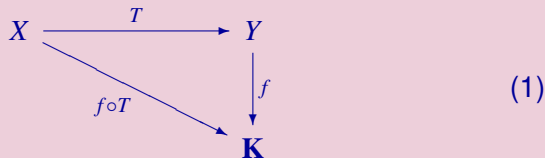
2011年5月

Chap 10 Banach 空间中的基本定理

§3 共轭算子

设 X 和 Y 是数域 $\mathbf{K}$ 上的赋范线性空间, X' 和 Y' 分别是它们的共轭空间. 设 $T \in \mathcal{B}(X \mapsto Y)$. 对每个 $f \in Y'$, 考虑如下复合映射 $f \circ T$

Diagram of Composition Mapping $f \circ T$



易见 $f \circ T \in X'$. 于是得一个新的对应关系 $f \mapsto f \circ T$.

共轭算子

设 X 和 Y 是同一个数域上的两个赋范线性空间, X' 和 Y' 分别是它们的共轭空间. 设 $T: X \mapsto Y$ 是一个有界线性算子. 定义映射 $T^\times: Y' \mapsto X'$ 如下:

$$T^\times f = f \circ T, \quad f \in Y'. \quad (2)$$

易见 $T^\times: Y' \mapsto X'$ 是线性算子, 称之为 T 的共轭算子.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{operator } T} & Y \\ \text{duality} \downarrow & & \downarrow \text{duality} \\ X' & \xleftarrow{\text{operator } T^\times} & Y' \end{array} \quad (3)$$

定理1

设 X 和 Y 是同一个数域上的两个赋范线性空间, $T: X \mapsto Y$ 是一个有界算子. 则 T 的共轭算子 $T^\times: Y' \mapsto X'$ 也是有界算子, 并且 $\|T^\times\| = \|T\|$.

证. 设 $f \in Y'$, 我们需要估计 $\|T^\times(f)\|$. 记 $g = T^\times f$, 则由 f 和 T 的有界性可得

$$|g(x)| = |f(Tx)| \leq \|f\| \|Tx\| \leq \|f\| \|T\| \|x\|, \quad x \in X.$$

于是

$$\|T^\times(f)\| = \|g\| \leq \|T\| \|f\|.$$

因此 $T^\times: Y' \mapsto X'$ 是有界算子, 并且 $\|T^\times\| \leq \|T\|$.

下证 $\|T\| \leq \|T^\times\|$, 为此只需验证 $\|Tx\| \leq \|T^\times\| \|x\|$, $\forall x \in X$.

- 当 $Tx = 0$ 时, 不等式 $\|Tx\| \leq \|T^\times\| \|x\|$ 显然成立;
- 当 $Tx \neq 0$ 时, 有 $f \in Y'$ 满足 $\|f\| = 1$ 且 $f(Tx) = \|Tx\|$, 于是 $\|Tx\| = |f(Tx)| = |(T^\times f)(x)| \leq \|(T^\times f)\| \|x\| \leq \|T^\times\| \|x\|$.

综上 $\|Tx\| \leq \|T^\times\| \|x\|$, $\forall x \in X$. 从而 $\|T\| \leq \|T^\times\|$.

♠ 设 T 是 n 维欧氏空间上一个线性算子, A 是其所对应的矩阵. 则 T 的共轭算子 $T^\times$ 所对应的矩阵恰为 A 的转置 A' .

♠ 设 T 是 Hilbert 空间 H 上的有界算子, T^* 是其 Hilbert 共轭算子, 则 $T^* = R^{-1}T^\times R$. 其中 $R: H \mapsto H'$ 为 Riesz 共轭同构算子.

Diagram of the Relationship between T^* and $T^\times$

Recall that $R: H \mapsto H'$ denotes the Riesz conjugate isomorphism. The following diagram shows the relationship between operators T^* and $T^\times$.

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{T^*} & H \\ R \downarrow & & \uparrow R^{-1} \\ H' & \xrightarrow{T^\times} & H' \end{array} \quad (4)$$

Here T^* is the Hilbert adjoint of T and $T^\times$ the adjoint defined in the present section.