泛函分析讲义

王才士

2011年5月

Chap 10 Banach 空间中的基本定理

§3 共轭算子

设 X 和 Y 是数域 $\mathbf{K}$ 上的赋范线性空间, X' 和 Y' 分别是它们的共轭空间. 设 $T \in \mathcal{B}(X \mapsto Y)$. 对每个 $f \in Y'$, 考虑如下复合映射 $f \circ T$

Diagram of Composition Mapping $f \circ T$

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "f\circ T"'] & Y \arrow[d, "f"] \\
& \mathbf{K}
\end{tikzcd}
\tag{1}
$$

易见 $f \circ T \in X'$. 于是得一个新的对应关系 $f \mapsto f \circ T$.

共轭算子

设 X 和 Y 是同一个数域上的两个赋范线性空间, X' 和 Y' 分别是它们的共轭空间. 设 $T: X \mapsto Y$ 是一个有界线性算子. 定义映射 $T^\times: Y' \mapsto X'$ 如下:

$$T^\times f = f \circ T, \quad f \in Y'. \tag{2}$$

易见 $T^\times: Y' \mapsto X'$ 是线性算子, 称之为 T 的共轭算子.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\text{operator } T"] \arrow[d, "\text{duality}"'] & Y \arrow[d, "\text{duality}"] \\
X' & Y' \arrow[l, "\text{operator } T^\times"]
\end{tikzcd} \tag{3}$$

定理1

设 X 和 Y 是同一个数域上的两个赋范线性空间, $T: X \mapsto Y$ 是一个有界算子. 则 T 的共轭算子 $T^\times: Y' \mapsto X'$ 也是有界算子, 并且 $\|T^\times\| = \|T\|$.

证. 设 $f \in Y'$, 我们需要估计 $\|T^\times(f)\|$. 记 $g = T^\times f$, 则由 f 和 T 的有界性可得

$$|g(x)| = |f(Tx)| \leq \|f\|\|Tx\| \leq \|f\|\|T\|\|x\|, \quad x \in X.$$

于是

$$\|T^\times(f)\| = \|g\| \leq \|T\|\|f\|.$$

因此 $T^\times: Y' \mapsto X'$ 是有界算子, 并且 $\|T^\times\| \leq \|T\|$.

下证 $\|T\| \le \|T^\times\|$, 为此只需验证 $\|Tx\| \le \|T^\times\|\|x\|, \ \forall x \in X$.

- 当 $Tx = 0$ 时, 不等式 $\|Tx\| \le \|T^\times\|\|x\|$ 显然成立;
- 当 $Tx \ne 0$ 时, 有 $f \in Y'$ 满足 $\|f\| = 1$ 且 $f(Tx) = \|Tx\|$, 于是 $\|Tx\| = |f(Tx)| = |(T^\times f)(x)| \le \|(T^\times f)\|\|x\| \le \|T^\times\|\|x\|$.

综上 $\|Tx\| \le \|T^\times\|\|x\|, \ \forall x \in X$. 从而 $\|T\| \le \|T^\times\|$.

♠ 设 T 是 n维欧式空间上一个线性算子, A 是其所对应的矩阵. 则 T 的共轭算子 $T^\times$ 所对应的矩阵恰为 A 的转置 A'.

♠ 设 T 是 Hilbert空间 H 上的有界算子, T^* 是其Hilbert共轭算子, 则 $T^* = R^{-1}T^\times R$. 其中 $R\colon H \mapsto H'$ 为Riesz共轭同构算子.

Diagram of the Relationship between T^* and $T^\times$

Recall that $R\colon H \mapsto H'$ denotes the Riesz conjugate isomorphism. The following diagram shows the relationship between operators T^* and $T^\times$.

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "T^*"] \arrow[d, "R"'] & H \\ H' \arrow[r, "T^\times"'] & H' \arrow[u, "R^{-1}"'] \end{tikzcd} \tag{4}$$

Here T^* is the Hilbert adjoint of T and $T^\times$ the adjoint defined in the present section.