泛函分析讲义

王才士

2011年5月

Chap 10 Banach 空间中的基本定理

通过前几章的讨论, 我们看到泛函分析的理论与方法具有高度的抽象概括性. 例如许多差别很大的收敛概念, 都可以归结为度量空间中依度量（距离）的收敛.

本章, 我们将看到泛函分析的理论与方法还具有更重要的特性, 即它的深刻性: 我们将看到许多在古典分析中看不到的东西.

本章的主要内容为四条基本定理, 即: Hahn-Banach 泛函延拓定理、一致有界原理、逆算子定理和闭图像定理. 这四条基本定理充分体现了泛函分析的理论与方法所具有的深刻性.

§1 泛函延拓定理

设 $p > 1$, 则 $L^p[0,1]$ 是一个Banach 空间. 我们知道 $L^p[0,1]$ 的共轭空间等于 $L^q[0,1]$, 其中 $1/p + 1/q = 1$. 这意味着 $L^q[0,1]$ 中的每个函数都能确定一个 $L^p[0,1]$ 上的连续线性泛函. 因此 $L^p[0,1]$ 上有足够多的连续线性泛函.

假如 X 是一个一般的Banach 空间, 那么一个很自然的问题是: X 上是否也有足够多的连续线性泛函? 本节, 我们将回答这样的问题. 为此我们考虑如下更一般的问题:

设 X 是一个赋范线性空间, Z 是 X 的子空间, f 是 Z 上的一个连续线性泛函, 问: 是否存在大空间 X 上的连续线性泛函 $\tilde{f}$ 满足 $\tilde{f}(z) = f(z), z \in Z$ 并且 $\|\tilde{f}\|_X = \|f\|_Z$?

次线性泛函

设 X 是一个线性空间, $p(x)$ 是 X 上的一个实值泛函. 若泛函 $p(x)$ 满足:

(1) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$, $x \in X$, α 是数;

(2) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, x, $y \in X$,

则称 $p(x)$ 为 X 上的一个次线性泛函.

♠ 容易验证, 如果 $p(x)$ 是线性空间 X 上的一个次线性泛函, 则它还是非负值的, 即:

(3) $p(x) \geq 0$, $x \in X$.

因此线性空间 X 上次线性泛函其实就是半范数(简称半范).

定理1

设 X 是一个实线性空间, $p(x)$ 是 X 上的一个次线性泛函(即半范). 若 f 是 X 的子空间 Z 上的一个实线性泛函, 并且被次线性泛函 $p(x)$ 所控制, 即满足:

$$f(z) \leq p(z), \quad z \in Z,$$

则存在 X 上的实线性泛函 $\tilde{f}$ 满足 $\tilde{f}(z) = f(z)$, $z \in Z$, 并且 $\tilde{f}$ 在整个空间 X 上仍被 $p(x)$ 所控制:

$$\tilde{f}(x) \leq p(x), \quad x \in X.$$

♠ 此定理称为Hahn-Banach 泛函扩张(或延拓)定理.

证明

若 $Z = X$, 则结论显然成立. 下设 Z 是 X 的真子空间. 分两步进行证明.

◇ 第一步. 证明: 对每个向量 $x_0 \in X \setminus Z$, 若记 Z_1 为 Z 与 x_0 张成的子空间, 即

$$Z_1 = \{ z + \alpha x_0 \mid z \in Z, \alpha \in \mathbf{R} \},$$

则存在 Z_1 上的实线性泛函 f_1 满足 $f_1(z) = f(z)$, $z \in Z$, 并且泛函 f_1 在大子空间 Z_1 上仍被 $p(x)$ 所控制:

$$f_1(x) \le p(x), \quad x \in Z_1.$$

◇ 第二步. 使用Zorn 引理和第一步的结论证明定理成立.

证明(续)

♢ 第一步的证明. 其实, 对任意 $u, v \in Z$, 根据控制条件我们有

$$f(u)+f(v)=f(u+x_0)+f(v-x_0)\leq p(u+x_0)+p(v-x_0).$$

移项得 $-p(v-x_0)+f(v)\leq p(u+x_0)-f(u)$. 令

$$\lambda_1=\sup_{v\in Z}[-p(v-x_0)+f(v)],\quad \lambda_2=\inf_{u\in Z}[p(u+x_0)-f(u)]$$

则 $\lambda_1\leq\lambda_2$. 取定 $\lambda\in[\lambda_1,\lambda_2]$, 我们定义 Z_1 上的实值泛函 f_1 如下:

$$f_1(z+\alpha x_0)=f(z)+\alpha\lambda,\quad z+\alpha x_0\in Z_1.$$

易见 f_1 有确定意义且为 Z_1 上的实值线性泛函. 此外, 还容易看出 $f_1(z)=f(z), z\in Z$. 下面验证 f_1 在 Z_1 上仍被 $p(x)$ 所控制.

证明(续)

其实, 对任意 $z+\alpha x_0 \in Z_1$, 我们有

$$
\begin{aligned}
f_1(z+\alpha x_0) &= f(z)+\alpha\lambda \\
&\le \begin{cases} f(z)+\alpha[p(z/\alpha+x_0)-f(z/\alpha)], & \alpha>0; \\ f(z), & \alpha=0; \\ f(z)+\alpha[-p(-z/\alpha-x_0)+f(-z/\alpha)], & \alpha<0. \end{cases} \\
&\le p(z+\alpha x_0).
\end{aligned}
$$

这说明 f_1 在 Z_1 上仍被 $p(x)$ 所控制. 于是第一步证明完成.

♢ 第二步的证明. 我们需要引入一个半序集 $\mathcal{A}$. 令

$$
\mathcal{A}=\{(D_g,g)\mid Z\subset D_g\subset X \text{ 为子空间}, g \text{ 为 } D_g \text{ 上的线性泛函}, D_g \text{ 被 } p(x) \text{ 控制且 } g|_Z=f\}
$$

证明(续)

易见 $(Z,f)\in\mathcal{A}$. 在 $\mathcal{A}$ 中引入序关系 "$\leq$" 如下:

$$(D_g,g)\leq(D_h,h)\iff D_g\subset D_h,\ h(x)=g(x),\ x\in D_g.$$

其中 $(D_g,g),(D_h,h)\in\mathcal{A}$. 容易验证 $\mathcal{A}$ 关于序关系 "$\leq$" 构成一个半序集. 我们还可以证明作为半序集 $\mathcal{A}$ 具有如下性质: $\mathcal{A}$的每个全序子集都在 $\mathcal{A}$ 中有上界. 于是由Zorn 引理, 作为半序集 $\mathcal{A}$ 必有极大元, 记为 $(D_{\tilde{f}},\tilde{f})$. 下证 $D_{\tilde{f}}=X$.

若不然, 则 $X\setminus D_{\tilde{f}}\neq\emptyset$, 取 $x_0\in X\setminus D_{\tilde{f}}$ 并记 Z_1 为 x_0 与 $D_{\tilde{f}}$ 张成的子空间. 由第一段的结论, 存在 Z_1 上的线性泛函 g 满足

$$g(x)=\tilde{f}(x),\ x\in D_{\tilde{f}};\quad g(x)\leq p(x),\ x\in Z_1.$$

证明(续)

易见 $(Z_1, g) \in \mathcal{A}$ 且 $(D_{\tilde{f}}, \tilde{f}) \le (Z_1, g)$. 从而由 $(D_{\tilde{f}}, \tilde{f})$ 的极大性得知 $(D_{\tilde{f}}, \tilde{f}) = (Z_1, g)$, 特别地 $D_{\tilde{f}} = Z_1$. 矛盾!

由于 $D_{\tilde{f}} = X$, 所以 $\tilde{f}$ 是 X 上的线性泛函. 又由于 $(D_{\tilde{f}}, \tilde{f}) \in \mathcal{A}$, 所以

$$\tilde{f}(z) = f(z),\ z \in Z; \quad \tilde{f}(x) \le p(x),\ x \in D_{\tilde{f}} = X.$$

至此定理完全得到证明.

设 $\mathbf{K}$ 表示实数域或者复数域. 下一个定理实际上给出了复线性空间上泛函的扩张定理.

定理2

设 X 是数域 $\mathbf{K}$ 上的线性空间, $p(x)$ 是 X 上的一个次线性泛函(即半范). 若 f 是 X 的子空间 Z 上的一个$\mathbf{K}$-值线性泛函, 并且被次线性泛函 $p(x)$ 所绝对控制, 即满足:

$$|f(z)| \leq p(z), \quad z \in Z,$$

则存在 X 上的$\mathbf{K}$-值线性泛函 $\tilde{f}$ 满足 $\tilde{f}(z) = f(z)$, $z \in Z$, 并且 $\tilde{f}$ 在整个空间 X 上仍被 $p(x)$ 所绝对控制:

$$|\tilde{f}(x)| \leq p(x), \quad x \in X.$$

前面讨论了针对一般线性空间的泛函扩张问题. 下面讨论针对赋范线性空间的泛函扩张问题. 由于有了范数, 我们将有更整齐的结果. 根据惯例, 赋范线性空间 X 的共轭空间记作 X'.

定理3

设 X 是一个赋范线性空间, Z 是 X 的一个子空间. 若 $f \in Z'$, 则有 $\tilde{f} \in X'$ 满足:

$$\tilde{f}(z) = f(z),\ z \in Z \text{ 且 } \|\tilde{f}\|_X = \|f\|_Z.$$

即子空间 Z 上的连续线性泛函在全空间 X 上必有保范连续线性扩张.

定理4

设 X 是一个赋范线性空间. 若 $x_0 \in X$ 且 $x_0 \neq 0$, 则有 $f \in X'$ 满足:

$$\|f\| = 1 \quad \text{且} \quad f(x_0) = \|x_0\|.$$

由此定理, 我们立得如下十分有用的推论.

推论1

设 X 是一个赋范线性空间, $x_0 \in X$. 若对于一切 $f \in X'$, 都有 $f(x_0) = 0$, 则必有 $x_0 = 0$.