9 有界线性算子和连续线性泛函

本节仍假定 $\mathbb{K}$ 表示实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$.

定义1 设 X 和 Y 是数域 $\mathbb{K}$ 上的两个线性空间, $\mathcal{D}$ 是 X 的线性子空间, $T\colon \mathcal{D} \mapsto Y$ 是一个映射, 如果 T 满足:

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{K},\ x, y \in \mathcal{D} \tag{9.1}$$

则称 T 为 $\mathcal{D}$ 到 Y 的线性算子. 其中 $\mathcal{D}$ 叫做 T 的定义域, 记作 $\mathcal{D}(T)$, $T\mathcal{D}$ 叫做 T 的值域, 记作 $\mathcal{R}(T)$.

线性空间 X 到其自身的线性算子常称为 X 上的线性算子.

注 由于数域 $\mathbb{K}$ 也是其自身上线性空间, 所以定义1也适合于 $Y = \mathbb{K}$ 的情形. 此时称 T 为 $\mathcal{D}$ 上的线性泛函. 特别地, 线性空间 X 上的线性泛函就是 X 到其所在数域 $\mathbb{K}$ 的线性算子.

设 T 是一个线性算子, 则 $T0 = 0$, 即 $0 \in \mathcal{N}(T)$, 其中 $\mathcal{N}(T)$ 表示 T 的零空间, 即

$$\mathcal{N}(T) = \{\, x \mid x \in \mathcal{D}(T),\ Tx = 0 \,\}. \tag{9.2}$$

这条性质说明线性算子把零向量变为把零向量.

下面例举一些常见的线性算子和泛函.

例1 (相似算子) 设 X 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间. 给定一个数 $\alpha \in \mathbb{K}$, 则可定义一个映射 $T\colon X \mapsto X$ 如下:

$$Tx = \alpha x, \quad x \in X. \tag{9.3}$$

易见 T 是 X 到其自身的线性算子, 称为相似算子.

当 $\alpha = 1$ 时, 相应的相似算子又称为恒等算子, 记作 I_X 或 I. 当 $\alpha = 0$ 时, 相应的相似算子称为零算子, 记作 O.

例1表明数域 $\mathbb{K}$ 中的每个数都对应着 X 到其自身的一个线性算子—相似算子.

例2 设 $\mathcal{P}[0,1]$ 表示区间 $[0,1]$ 上的全体多项式构成的线性空间. 定义映射 $T\colon \mathcal{P}[0,1] \mapsto \mathcal{P}[0,1]$ 如下:

$$(Tx)(t) = \frac{d}{dt}x(t), \quad x \in \mathcal{P}[0,1]. \tag{9.4}$$

由求导运算的线性性质可知 T 是 $\mathcal{P}[0,1]$ 上的线性算子, 称为微分算子. 取定一个数 $t_0 \in [0,1]$, 则可定义 $\mathcal{P}[0,1]$ 上的泛函 f 如下:

$$f(x) = x'(t_0), \quad x \in \mathcal{P}[0,1]. \tag{9.5}$$

易见 f 是 $\mathcal{P}[0,1]$ 上的线性泛函.

例3 定义映射 $T\colon C[a,b]\mapsto C[a,b]$ 如下:

$$(Tx)(t)=\int_a^t x(s)ds,\quad x\in C[a,b]. \tag{9.6}$$

由积分运算的线性性质可知 T 是 $C[a,b]$ 上的线性算子, 称为积分算子. 若定义

$$f(x)=\int_a^b x(t)dt,\quad x\in C[a,b], \tag{9.7}$$

则 f 是 $C[a,b]$ 上的线性泛函.

例4 (乘法算子) 定义映射 $T\colon C[a,b]\mapsto C[a,b]$ 如下:

$$(Tx)(t)=tx(t),\quad x\in C[a,b]. \tag{9.8}$$

则不难验证 T 是 $C[a,b]$ 上的线性算子, 称为乘法算子. 乘法算子在量子物理和算子谱论等领域有着重要的意义.

例5 ($\mathbf{R}^n$ 上的线性算子) 设 A 是一个 $n\times n$ 实方阵, 定义映射 $T\colon \mathbf{R}^n\mapsto \mathbf{R}^n$如下:

$$Tx=Ax,\quad x\in\mathbf{R}^n. \tag{9.9}$$

其中 Ax 表示矩阵相乘. 则 T 是$\mathbf{R}^n$ 上线性算子. 反之, 若 T 是 $\mathbf{R}^n$ 上的线性算子, 则一定存在一个实方阵 A 使得 T 满足(9.9)式.

例5表明 $\mathbf{R}^n$ 上的线性算子对应着 $n\times n$ 实方阵. 下面的讨论则表明 $\mathbf{R}^n$ 上的线性泛函对应着 $\mathbf{R}^n$ 中的向量.

取定 $u=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in\mathbf{R}^n$, 则可定义 $\mathbf{R}^n$ 上泛函 f 如下:

$$f(x)=\sum_{i=1}^n \alpha_i\xi_i,\quad x\in\mathbf{R}^n \tag{9.10}$$

其中 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$. 容易验证 f 是 $\mathbf{R}^n$ 上的线性泛函.

反之, 若 f 是 $\mathbf{R}^n$ 上的线性泛函, 则 f 可表示为(9.10)的形式, 其中 $u=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 由下式确定

$$\alpha_i=f(e_i),\quad 1\le i\le n.$$

此处 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的一个基.

对于赋范线性空间之间线性算子, 我们自然要考虑他们的连续性特征. 下一段的讨论将集中于这一论题.

以下, 我们假定 X 和 Y 是两个给定的赋范线性空间, 他们的范数(必要时)分别记做 $\|\cdot\|_X$ 和 $\|\cdot\|_Y$.

定义2 设 $T\colon \mathcal{D}(T) \mapsto Y$ 是一个线性算子, 其中 $\mathcal{D}(T)$ 是 X 的一个子空间. 若存在常数 $M \geq 0$ 使得

$$\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X, \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(T), \tag{9.11}$$

则称 T 是 $\mathcal{D}(T)$ 到 Y 的有界线性算子. 当 $\mathcal{D}(T) = X$ 时, 称 T 是 X 到 Y 的有界线性算子, 简称有界算子.

注 若线性算子 $T\colon \mathcal{D}(T) \mapsto Y$ 不是有界线性算子, 则称之为无界算子.

下一个定理说明, 对于赋范线性空间之间的线性算子, 它们的连续性与有界性是等价的.

定理1 设 $T\colon X \mapsto Y$ 是一个线性算子. 则: T 为有界算子的充分必要条件是 T 为 X 到 Y 的连续算子.

证明 先证必要性. 此时, 由 T 的线性和有界性得

$$\|Tu - Tv\|_Y = \|T(u-v)\|_Y \leq M\|u-v\|_X, \quad u, v \in X.$$

任取 $x \in X$. 若点列 $\{x_n\} \subset X$ 依范数收敛于 x, 则由上面不等式看出$\{Tx_n\}$ 依范数收敛于 Tx. 从而说明 T 在 x 处连续. 由 $x \in X$ 的任意性可知, T 在 X 上处处连续, 即 T 是连续算子.

再证充分性. 此时, T 在零向量 0 处连续, 因而存在正数 δ, 使得当 $x \in X$ 且 $\|x - 0\|_X < \delta$ 时, 有

$$\|Tx - T0\|_Y < 1.$$

取 $M = 2/\delta$. 则对任 $x \in X$, 当 $x = 0$时, 不等式 $\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X$ 显然成立; 当 $x \neq 0$时, 因

$$\Big\|\frac{\delta x}{2\|x\|_X} - 0\Big\|_X = \frac{\delta}{2} < \delta,$$

故

$$\frac{\delta}{2\|x\|_X}\|Tx\|_Y = \Big\|T\Big(\frac{\delta x}{2\|x\|_X}\Big) - T0\Big\|_Y < 1,$$

从而仍有 $\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X$. 总之 T 是有界算子.

注 设 $T\colon X\mapsto Y$ 是一个线性算子. 则下列条件彼此等价: (1) T 是连续算子(即 T 在 X 上处处连续); (2) T 在 X 的某一点 x_0 处连续; (3) T 在 X 的零向量处连续; (4) T 是有界算子.

线性泛函是特殊的线性算子, 因而有更加特别的连续性特征.

定理2 设 f 是 X 上的一个线性泛函. 则 f 在 X 上连续的充分必要条件是 f 的零空间 $\mathcal{N}(f)$ 是 X 的闭子空间.

证明 先证必要性. 此时, f 在 X 上连续. 设点列 $\{x_n\}\subset\mathcal{N}(f)$ 依范数收敛于 $x\in X$, 则由 f 的连续性得:

$$0=f(x_n)\longrightarrow f(x)\quad(n\longrightarrow\infty),$$

从而 $f(x)=0$, 即 $x\in\mathcal{N}(f)$. 这说明 $\mathcal{N}(f)$ 包含其所有聚点, 从而是 X 的闭子空间.

再证充分性. 此时, $\mathcal{N}(f)$ 是 X 的闭子空间, 往证 f 连续. 根据定理1, 只需证明 f 有界. 用反证法. 若 f 无界, 则有点列 $\{x_n\}\subset X$ 满足

$$|f(x_n)|>n\|x_n\|,\quad n\geq 1.$$

易见 $f(x_n)\neq 0$ $(n\geq 1)$, 特别地 $f(x_1)\neq 0$. 此外还可以看出 $x_n/f(x_n)\to 0$. 令

$$z_n=x_1-\frac{f(x_1)}{f(x_n)}x_n,\quad n\geq 1.$$

则容易看出 $\{z_n\}\subset\mathcal{N}(f)$. 另一方面, 我们不难发现 $z_n\to x_1$. 于是由 $\mathcal{N}(f)$ 的闭性得 $x_1\in\mathcal{N}(f)$, 从而 $f(x_1)=0$. 矛盾!

定义3 设 $T\colon\mathcal{D}(T)\mapsto Y$ 是一个线性算子, 其中 $\mathcal{D}(T)$ 是 X 的子空间. 定义

$$\|T\|=\sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\;\middle|\;x\neq 0,\ x\in\mathcal{D}(T)\right\}.\tag{9.12}$$

称之为算子 T 的范数.

易见, T 有界 $\Leftrightarrow$ $\|T\|<\infty$. 当 T 有界时, $\|T\|$ 反映了 T 的最大伸缩率, 并且

$$\|Tx\|\leq\|T\|\|x\|,\quad\forall\,x\in\mathcal{D}(T).\tag{9.13}$$

因此 $\|T\|=\min\{\,M\mid M\geq 0,\|Tx\|\leq M\|x\|,\forall\,x\in\mathcal{D}(T)\,\}$.

引理1 设 $T\colon\mathcal{D}(T)\mapsto Y$ 是一个有界算子, 其中 $\mathcal{D}(T)$ 是 X 的子空间. 则

$$\begin{aligned}\|T\|&=\sup\big\{\|Tx\|\mid x\in\mathcal{D}(T),\,\|x\|=1\big\}\\&=\sup\big\{\|Tx\|\mid x\in\mathcal{D}(T),\,\|x\|\leq 1\big\}.\end{aligned}\tag{9.14}$$

证明 令

$$\alpha = \sup\big\{\|Tx\| \mid x \in \mathcal{D}(T),\, \|x\| = 1\big\},$$
$$\beta = \sup\big\{\|Tx\| \mid x \in \mathcal{D}(T),\, \|x\| \le 1\big\}.$$

易见 $\alpha \le \beta$. 当 $\|x\| \le 1$ 时, $\|Tx\| \le \|T\|\|x\| \le \|T\|$, 因此 $\beta \le \|T\|$. 下证 $\|T\| \le \alpha$. 其实, 若 $x \in \mathcal{D}(T)$ 且 $x \ne 0$, 则 $\big\|x/\|x\|\big\| = 1$. 于是

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \Big\|T\Big(\frac{x}{\|x\|}\Big)\Big\| \le \alpha, \quad x \in \mathcal{D}(T),\, x \ne 0.$$

由此可知 $\|T\| \le \alpha$. 综上 $\|T\| \le \alpha \le \beta \le \|T\|$，从而$\|T\| = \alpha = \beta$. 证毕.

以下, 我们例举一些有界线性算子和有界线性泛函.

例6 赋范线性空间 X 上的比例算子 $Tx = \alpha x$ 是有界线性算子. 并且

$$\|T\| = |\alpha|. \tag{9.15}$$

特别地 $\|I\| = 1$, $\|O\| = 0$.

例7 考虑连续函数空间 $C[0,1]$. 设 $K(t,\tau)$ 是 $[0,1]\times[0,1]$ 上的二元连续函数. 定义映射$T\colon C[0,1] \mapsto C[0,1]$ 如下:

$$(Tx)(t) = \int_0^1 K(t,\tau)x(\tau)d\tau, \quad t \in [0,1] \tag{9.16}$$

其中 $x \in C[0,1]$. 易见 T 是 $C[0,1]$ 上的线性算子. 可以证明: 算子 T 是 $C[0,1]$ 上的有界线性算子, 并且范数由下式给出

$$\|T\| = \max_{0\le t\le 1}\int_0^1 |K(t,\tau)|d\tau. \tag{9.17}$$

算子 T 称为由连续核定义的积分算子, 其中二元连续函数 $K(t,\tau)$ 叫做 T 的核.