8 赋范线性空间和Banach空间

一般的度量空间没有代数结构, 只有一种拓扑结构(即距离). 本节, 我们将讨论一类既有代数结构又有拓扑结构的空间, 即所谓赋范线性空间. 以下, $\mathbb{K}$ 仍表示实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$.

定义1 设 X 是数域 $\mathbb{K}$ 上的一个线性空间, $\|\cdot\|$ 是一个定义在 X 上的实值函数. 若 $\|\cdot\|$ 满足:

(i) 正定性: $\|x\| \geq 0, \forall\, x \in X$ 且 $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(ii) 正齐次性: $\|ax\| = |a|\|x\|, \forall\, a \in \mathbb{K}, \forall\, x \in X$;

(iii) 三角不等式: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall\, x, y \in X$,

则称 $\|\cdot\|$ 为线性空间 X 上的范数, 并称 $(X, \|\cdot\|)$ 为(数域 $\mathbb{K}$ 上) 的赋范线性空间.

注 定义1中所述的条件(i)、(ii)和(iii)通常称为范数的三公理. 此外, 如果 $\|\cdot\|$ 为线性空间 X 上的一个范数, 我们也称 X 关于 $\|\cdot\|$ 构成一个赋范线性空间.

以下, 我们假定 $(X, \|\cdot\|)$ 是一个给定的赋范线性空间. 类似于数的绝对值, 我们称 $\|x\|$ 为向量 x 的范数.

设 $\{x_n\}$ 是 X 中的一个向量序列, x 是 X 中的一个向量. 如果

$$\|x_n - x\| \to 0 \quad (n \to \infty), \tag{8.1}$$

则称 $\{x_n\}$ 依范数收敛于 x, 记作 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ 或简记为 $x_n \to x$.

借助于范数 $\|\cdot\|$, 我们可以在 X 上引入如下二元函数:

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in X. \tag{8.2}$$

容易验证 d 是 X 上的一个距离, 称为范数 $\|\cdot\|$ 的导出距离. 显然, 对于向量序列 $\{x_n\} \subset X$ 和向量 $x \in X$ 而言, $\{x_n\}$ 依范数收敛于 x 其实就是 $\{x_n\}$ 按导出距离收敛于 x. 因此, 赋范线性空间实际上是一类特殊的度量空间.

由范数的性质容易得到导出距离 d 的下列性质:

$$d(x, y) = d(x - y, 0), \quad d(ax, 0) = |a|d(x, 0), \tag{8.3}$$

其中 $x \in X$, $a \in \mathbb{K}$. 反之可以证明, 如果 d 是线性空间 X 上的一个距离并且 d 具有上述性质, 则 d 一定是某个范数的导出距离.

设 D 是赋范线性空间 X 的一个子集. 则不难验证 D 有界的充分必要条件是存在正数 M 使得 $\|x\| \leq M, \forall\, x \in D$.

根据三角不等式, 我们容易得到范数的下列性质:

$$| \, \|x\| - \|y\| \, | \leq \|x - y\|, \quad x, y \in X. \tag{8.4}$$

由此可以看出, 函数 $f(x) = \|x\|$ 是 X 上的连续函数, 从而当 $x_n \to x$ 时, 必有 $\|x_n\| \to \|x\|$.

由于赋范线性空间是一类特殊的度量空间, 所以完备性概念同样适应于赋范线性空间. 我们称完备的赋范线性空间为巴拿赫(Banach)空间.

下面我们例举一些常用的赋范线性空间.

例1 (欧氏空间 $\mathbb{R}^n$)　对于 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, 定义

$$\|x\| = \sqrt{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \cdots + |\xi_n|^2}. \tag{8.5}$$

利用Cauchy不等式可以证明上式定义的 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个范数, 称为欧氏范数. 显然欧氏范数 $\|\cdot\|$ 的导出距离就是前面介绍过的欧氏距离, 因而 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ 是一个Banach空间.

例2 (连续函数空间 $C[a,b]$)　对于 $x \in C[a,b]$, 定义

$$\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|. \tag{8.6}$$

容易验证上式定义的 $\|\cdot\|$ 是 $C[a,b]$ 上的一个范数, 称为最大模范数. 显然最大模范数的导出距离就是前面介绍过的最大模距离, 因而 $C[a,b]$ 关于最大模范数构成一个Banach空间.

例3 (有界数列空间 l^∞)　对于 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k, \cdots) \in l^\infty$, 定义

$$\|x\| = \sup_{k \geq 1} |\xi_k|. \tag{8.7}$$

不难验证上式定义的 $\|\cdot\|$ 是 l^∞ 上的一个范数, 并且 l^∞ 关于此范数构成一个Banach空间.

例4 (函数空间 $L^p[a,b]$)　设 $p > 0$, $f(t)$ 是区间 $[a,b]$ 上的一个可测函数. 称 $f(t)$ 为p-幂可积函数如果

$$\int_a^b |f(t)|^p dt < \infty. \tag{8.8}$$

以 $L^p[a,b]$ 表示在区间 $[a,b]$ 上p-幂可积函数的全体. 对于 $f, g \in L^p[a,b]$, 若 $f(t) = g(t)$ a.e., 则规定 $f = g$.

易见 $L^p[a,b]$ 对通常的数乘运算封闭. 此外, 利用不等式 $|a+b|^p \leq 2^p(|a|^p + |b|^p)$ 还可以验证 $L^p[a,b]$ 对通常的加法运算也封闭. 因而 $L^p[a,b]$ 是一个线性空间.

对于 $f \in L^p[a,b]$, 规定

$$\|f\|_p = \Big(\int_a^b |f(t)|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}}, \tag{8.9}$$

称之为 f 的L^p-范数. 我们将证明, 当时 $p \geq 1$ 时, $L^p[a,b]$ 关于 $\|\cdot\|_p$ 构成一个Banach空间.

引理1 (Hölder不等式) 设 p, $q > 1$ 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 则对任意 $f \in L^p[a,b]$ 和任意 $g \in L^q[a,b]$, 都有 $fg \in L^1[a,b]$ 并且成立

$$\int_a^b |f(t)g(t)|dt \leq \|f\|_p \|g\|_q. \tag{8.10}$$

证明 对于任意正数 A 和 B, 使用函数 $\varphi(t) = t^{\frac{1}{p}} - \frac{t}{p}$ 可以证明如下均值不等式成立

$$A^{\frac{1}{p}} B^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}A + \frac{1}{q}B. \tag{8.11}$$

使用这个不等式可得

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(t)g(t)|dt &= \int_a^b (|f(t)|^p)^{\frac{1}{p}} (|g(t)|^q)^{\frac{1}{q}} dt \\ &\leq \int_a^b \Big(\frac{1}{p}|f(t)|^p + \frac{1}{q}|g(t)|^q\Big)dt = \frac{1}{p}\int_a^b |f(t)|^p dt + \frac{1}{q}\int_a^b |g(t)|^q dt < \infty,\end{aligned}$$

这说明 $fg \in L^1[a,b]$. 下证不等式(8.10).

其实当 $\|f\|_p \|g\|_q = 0$ 时, 必有 $f(t)g(t) = 0$ a.e.于$[a,b]$, 从而不等式(8.10)成立. 下设 $\|f\|_p \|g\|_q > 0$. 此时必有 $\|f\|_p > 0$, $\|g\|_q > 0$, 从而我们可定义 $[a,b]$ 上的函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 如下:

$$\varphi(t) = \frac{f(t)}{\|f\|_p}, \quad \psi(t) = \frac{g(t)}{\|g\|_q}.$$

显然 $\varphi \in L^p[a,b]$, $\psi \in L^q[a,b]$. 于是, 以同样的方法可以证明 $\varphi\psi \in L^1[a,b]$ 并且

$$\int_a^b |\varphi(t)\psi(t)|dt \leq \frac{1}{p}\int_a^b |\varphi(t)|^p dt + \frac{1}{q}\int_a^b |\psi(t)|^q dt.$$

注意到

$$\frac{1}{p}\int_a^b |\varphi(t)|^p dt + \frac{1}{q}\int_a^b |\psi(t)|^p dt = \frac{1}{p}\int_a^b \frac{|f(t)|^p}{\|f\|_p^p} dt + \frac{1}{q}\int_a^b \frac{|g(t)|^p}{\|g\|_q^q} dt = 1,$$

我们有

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(t)g(t)|dt &= \|f\|_p \|g\|_q \int_a^b |\varphi(t)\psi(t)|dt \\ &\leq \|f\|_p \|g\|_q \Big(\frac{1}{p}\int_a^b |\varphi(t)|^p dt + \frac{1}{q}\int_a^b |\psi(t)|^q dt\Big) = \|f\|_p \|g\|_q.\end{aligned}$$

综上可知不等式(8.10)成立.

引理2 (Minkowski 不等式) 设 $p \geq 1$, f, $g \in L^p[a,b]$, 则 $f+g \in L^p[a,b]$ 并且成立

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{8.12}$$

证明 前面已经指出 $L^p[a,b]$ 对加法封闭, 因而 $f+g \in L^p[a,b]$. 下面验证不等式(8.12). 其实, 当 $p=1$ 时直接计算可得不等式(8.12). 下设 $p>1$. 此时, 若取 $q=\frac{p}{p-1}$, 则 $q>1$ 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 由于 $f+g \in L^p[a,b]$, 所以 $|f+g|^{p-1} \in L^q[a,b]$, 从而使用Hölder不等式可得

$$\int_a^b |f(t)||f(t)+g(t)|^{p-1}dt \leq \|f\|_p \, \||f+g|^{p-1}\|_q = \|f\|_p \|f+g\|_p^{p-1}.$$

同理

$$\int_a^b |g(t)||f(t)+g(t)|^{p-1}dt \leq \|g\|_p \, \||f+g|^{p-1}\|_q = \|g\|_p \|f+g\|_p^{p-1}.$$

另一方面, 由不等式

$$|a+b|^p \leq |a||a+b|^{p-1} + |b||a+b|^{p-1}$$

可得

$$\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt \leq \int_a^b |f(t)||f(t)+g(t)|^{p-1}dt + \int_a^b |g(t)||f(t)+g(t)|^{p-1}dt.$$

于是有

$$\|f+g\|_p^p = \int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt \leq (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f+g\|_p^{p-1},$$

此式蕴含(8.12). 综上, 不等式(8.12)成立.

定理1 设 $p \geq 1$, 则 $L^p[a,b]$ 关于L^p-范数 $\|\cdot\|_p$ 构成一个赋范线性空间.

证明 只需验证 $\|\cdot\|_p$ 满足范数定义中的三个条件. 其实, 正定性条件和正齐次性条件显然满足, 而由Minkowski 不等式可知三角不等式条件也满足.

定理2 设 $p \geq 1$, 则 $L^p[a,b]$ 关于 L^p-范数$\|\cdot\|_p$ 构成一个Banach空间.

证明 根据定理1, 我们只需验证: $L^p[a,b]$ 是完备的, 即 $L^p[a,b]$ 的每个Chauchy列都在 $L^p[a,b]$ 收敛.

设 $\{f_n\}$ 是 $L^p[a,b]$ 中的一个Chauchy列, 则存在子列 $\{f_{n_k}\}$ 满足

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq \frac{1}{2^k}, \quad k \geq 1.$$

由此可得

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)| dt \le \sum_{k=1}^{\infty} M \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \le M,$$

其中 $M = (b-a)^{\frac{p-1}{p}}$ (当 $p > 1$ 时) 或 $M = 1$ (当 $p = 1$ 时). 上述不等式这意味着

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)| < \infty, \text{ a.e.于 } [a,b],$$

从而 $\{f_{n_k}(t)\}$ a.e.收敛于一个可测函数 $f(t)$. 易见, 当 $k \ge 2$ 时, 有

$$\|f_{n_k}\|_p \le \sum_{j=1}^{k-1} \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p + \|f_{n_1}\|_p \le 1 + \|f_{n_1}\|_p,$$

所以

$$\int_a^b |f_{n_k}(t)|^p dt \le \Big(1 + \|f_{n_1}\|_p\Big)^p, \quad k \ge 2.$$

由于 $f_{n_k}(t) \to f(t)$ a.e., 所以使用Fatou引理可进一步得到

$$\int_a^b |f(t)|^p dt \le \Big(1 + \|f_{n_1}\|_p\Big)^p.$$

这说明 $f \in L^p[a,b]$.

$\forall \epsilon > 0$, 因 $\{f_n\}$ 是Chauchy 列, 故存在 $N \ge 1$ 使得当 $m, n > N$ 时, 有

$$\int_a^b |f_m(t) - f_n(t)|^p dt = \|f_m - f_n\|_p^p < \epsilon^p,$$

特别地, 当 $m, k > N$ 时, 必有 $m, n_k > N$, 从而

$$\int_a^b |f_m(t) - f_{n_k}(t)|^p dt < \epsilon^p.$$

在上式中令 $k \to \infty$ 并使用Fatou引理得

$$\|f_m - f\|_p^p = \int_a^b |f_m(t) - f(t)|^p dt \le \epsilon^p, \quad m > N,$$

此即: 当 $m > N$ 时, 有

$$\|f_m - f\|_p \le \epsilon.$$

于是证明了 $\{f_n\}$ 依范数收敛于 f.

综上可知 $L^p[a,b]$ 的每个Chauchy列都在 $L^p[a,b]$ 收敛, 即 $L^p[a,b]$ 完备. 证毕.

注 设 $p \geq 1$, 则 $C[a,b]$ 是 $L^p[a,b]$ 的一个子空间, 但不是闭子空间. 因此 $C[a,b]$ 关于L^p-范数 $\|\cdot\|_p$ 构成一个不完备的赋范线性空间. 但可以证明 $C[a,b]$ 关于 $\|\cdot\|_p$ 的完备化就是 $L^p[a,b]$.

例5 (空间 l^p) 类似于 $L^p[a,b]$ 的情形, 对于 $x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3\cdots)\in l^p$, 若定义

$$\|x\|_p=\Big(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \tag{8.13}$$

则可证明 l^p 关于上式所定义的 $\|\cdot\|_p$ 构成一个Banach空间.

下面, 我们讨论有限维赋范线性空间的某些独特性质. 首先利用欧式空间单位球面的紧性可以证明如下结果.

定理3 设 X 是一个n维赋范线性空间, $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是其一个基, 则存在正常数 M 和 M', 使得对一切$x=\sum_{k=1}^n\xi_k e_k\in X$, 成立

$$M\|x\|\leq\Big(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\leq M'\|x\|. \tag{8.14}$$

证明 显然有

$$\|x\|\leq\Big\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\Big\|\leq\Big(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{k=1}^{n}\|e_k\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

由此得

$$M\|x\|\leq\Big(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

其中 $M=\big(\sum_{k=1}^n\|e_k\|^2\big)^{-1/2}$. 下面考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的函数

$$f(u)=\Big\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\Big\|,\quad u=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n.$$

设 $u=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$, $v=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\in\mathbb{R}^n$, 则

$$|f(u)-f(v)|\leq\Big(\sum_{k=1}^{n}\|e_k\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\|u-v\|.$$

可见 $f(u)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数, 因而在 $\mathbb{R}^n$ 的单位球面上取得最小值 c_0. 易见 $c_0>0$.

设 $u\in\mathbb{R}^n$ (不妨设 $u\neq 0$). 若令 $u_0=u/\|u\|$, 则 u_0 属于 $\mathbb{R}^n$ 的单位球面, 从而有

$$\frac{\|x\|}{\|u\|}=\frac{f(u)}{\|u\|}=f\Big(\frac{u}{\|u\|}\Big)\geq c_0.$$

由此并注意到 $\|u\| = \left(\sum_{k=1}^{n} \|\xi_k\|^2\right)^{1/2}$ 得

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq M'\|x\|$$

其中 $M' = 1/c_0$. 证毕.

推论1 设 X 是一个有限维线性空间. 若 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_1$ 是 X 上的两个范数, 则必有常数 M, $M' > 0$, 使得

$$M\|x\| \leq \|x\|_1 \leq M'\|x\|, \quad x \in X. \tag{8.15}$$

即范数 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_1$ 等价.

定义2 设 $(X, \|\cdot\|_X)$ 和 $(Y, \|\cdot\|_Y)$ 是两个赋范线性空间. 若存在线性双射 $T\colon X \mapsto Y$ 和正数 M, M' 满足

$$M\|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \leq M'\|x\|_X, \quad x \in X, \tag{8.16}$$

则称 $(X, \|\cdot\|_X)$ 与 $(Y, \|\cdot\|_Y)$ 拓扑同构.

由定理3立得如下关于有限维赋范线性空间的拓扑同构基本结论.

推论2 若 X 是一个有限维赋范线性空间, 则 X 必与同维数的欧氏空间拓扑同构. 相同维数的有限维赋范线性空间彼此拓扑同构.