7 线性空间

在许多数学问题和实际问题中, 我们遇到的空间不仅要求有拓扑结构(可进行极限运算), 而且还要求有代数结构(可进行加法、数乘等代数运算). 在后面的章节中, 我们将具体考察既有拓扑结构又有代数结构的两类空间.

本节, 我们先回顾一类常见的代数结构, 即所谓线性结构. 这类结构涉及加法和数乘两种代数运算. 以下, 如无特别说明, 我们总假定 $\mathbb{K}$ 表示实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$.

定义1 设 X 是一个非空集合, 其中定义了如下两种运算: X 的元素之间的加法运算"+"; $\mathbb{K}$ 中的数与 X 的元素之间的数乘运算"·"(数乘运算符号"·"常省略). 如果这两种运算满足:

(I) X 关于加法运算"+"构成一个加法群, 即满足:

(1) 结合律 $(x+y)+z=x+(y+z), \quad \forall x, y, z \in X$;

(2) 交换律 $x+y=y+x, \quad \forall x, y \in X$;

(3) 存在 $\theta \in X$, 使 $x+\theta=x, \quad \forall x \in X$ (称 θ 为零元);

(4) 对每个 $x \in X$, 存在 $x' \in X$ 使 $x+x'=\theta$ (称 x' 为 x 的负元, 并记作 $x'=-x$);

(Ⅱ) 数乘运算"·"满足(运算符号"·"常省略):

(5) $1x=x, \quad \forall x \in X$;

(6) $a(bx)=(ab)x, \quad \forall a, b \in \mathbb{K}, \forall x \in X$;

(7) $a(x+y)=ax+ay, \quad \forall a \in \mathbb{K}, \forall x, y \in X$;

(8) $(a+b)x=ax+bx, \quad \forall a, b \in \mathbb{K}, \forall x \in X$;

则称 X 关于上述加法和数乘运算构成数域 $\mathbb{K}$ 上的一个线性空间或向量空间, 其元素称为向量.

实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间简称为实线性空间. 同理, 复数域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间简称为复线性空间.

根据线性空间的定义, 我们不难得到下列运算性质: 设 X 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, 则成立

$$0x=\theta, \quad \forall x \in X; \tag{7.1}$$

$$a\theta=\theta, \quad \forall a \in \mathbb{K}; \tag{7.2}$$

$$(-1)x=-x, \quad \forall x \in X. \tag{7.3}$$

今后我们常把零向量 θ 简记作 0. 这样以来, 我们需要根据上下文来判断 0 的确切含义.

以下, 我们例举一些线性空间. 其中一些是我们所熟悉的, 另一些则是新的.

例1 考虑 $\mathbb{R}^n$. 在 $\mathbb{R}^n$ 中定义加法和数乘运算如下:

$$x + y = \big(\xi_1 + \eta_1,\, \xi_2 + \eta_2,\, \cdots,\, \xi_n + \eta_n\big); \tag{7.4}$$

$$ax = \big(a\xi_1,\, a\xi_2,\, \cdots,\, a\xi_n\big), \tag{7.5}$$

其中 $a \in \mathbb{R}$, $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$. 容易验证 $\mathbb{R}^n$ 关于上述加法和数乘运算构成一个实线性空间, 其零向量为 $\theta = (0, 0, \cdots, 0)$.

类似地, $\mathbb{C}^n$ 构成一个复线性空间. 此处 $\mathbb{C}^n$ 表示 $\mathbb{C}$ 的 n 次笛卡尔乘积.

例2 考虑 $C[a, b]$. 在 $C[a, b]$ 中定义加法和数乘运算如下:

$$(x + y)(t) = x(t) + y(t), \quad t \in [a, b]; \tag{7.6}$$

$$(ax)(t) = ax(t), \quad t \in [a, b], \tag{7.7}$$

其中 a 是数, x, $y \in C[a, b]$. 容易验证 $C[a, b]$ 关于上述加法和数乘运算构成一个线性空间, 其零向量为零函数 $\theta(t) \equiv 0$.

一般地, 设 Ω 是一个非空集合, $\mathcal{F}$ 是由 Ω 上的某些函数构成的函数族. 对于 $\mathcal{F}$ 中元素 f 和 g 以及数 a, 我们总按如下方式定义它们的和及数积:

(1) 和 $f + g$ 的定义: $(f + g)(\omega) = f(\omega) + g(\omega), \quad \omega \in \Omega$;

(2) 数积 af 的定义: $(af)(\omega) = af(\omega), \quad \omega \in \Omega$.

容易验证: 如果 $\mathcal{F}$ 对上述加法和数乘运算封闭, 即对任意 f, $g \in \mathcal{F}$ 及任何数 a, 都有 $f + g$, $af \in \mathcal{F}$, 那么 $\mathcal{F}$ 按上述加法和数乘运算构成一个线性空间.

设 $p > 0$ 是一个正数, $x = \{\xi_k\}_{k \geq 1} = \big(\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_k, \cdots\big)$ 是一个数列. 若 x 满足

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < \infty, \tag{7.8}$$

则称 x 是一个 p-幂可和数列(教材称 p-幂收敛数列, 似不确切). 全体p-幂可和数列构成的集合记做 l^p.

例3 设 $p > 0$ 给定. 对于 x, $y \in l^p$ 及数 a, 定义:

$$x + y = \{\xi_k + \eta_k\}_{k \geq 1}; \tag{7.9}$$

$$ax = \{a\xi_k\}_{k \geq 1}, \tag{7.10}$$

其中 $x = \{\xi_k\}_{k \geq 1}$, $y = \{\eta_k\}_{k \geq 1}$. 则可以证明: $x + y$, $ax \in l^p$, 从而 l^p 关于上述加法和数乘运算构成一个线性空间.

其实, $ax \in l^p$ 容易验证. 至于 $x+y\in l^p$, 则可利用如下不等式得到验证:

$$|u+v|^p \leq 2^p(|u|^p+|v|^p), \tag{7.11}$$

其中 u, v 是任意两个数.

一般地, 如果 $\mathcal{S}$ 是由某些数列构成的集合, 那么我们总是按下列方式定义 $\mathcal{S}$ 中元素的"和"及"数积":

(1) 和: $x+y=\{\xi_k+\eta_k\}_{k\geq 1}$, 其中 $x=\{\xi_k\}_{k\geq 1}$, $y=\big(\eta_k\big)_{k\geq 1}$ 属于 $\mathcal{S}$;

(2) 数积: $ax=\{a\xi_k\}_{k\geq 1}$, 其中 a 是数, $x=\{\xi_k\}_{k\geq 1}$ 属于 $\mathcal{S}$.

容易验证: 如果 $\mathcal{S}$ 对于上述加法和数乘运算封闭, 即对任意 x, $y\in\mathcal{S}$ 及任意数 a, 都有 $x+y$, $ax\in\mathcal{S}$, 那么 $\mathcal{S}$ 关于上述加法和数乘运算构成一个线性空间.

下面, 我们回到一般线性空间. 设 X 是数域 $\mathbb{K}$ 上的一个线性空间.

若 X 的非空子集 M 关于 X 中的加法及数乘运算也构成数域 $\mathbb{K}$ 上的一个线性空间, 则称 M 为 X 的线性子空间, 简称子空间.

容易证明: $M\subset X$ 构成 X 的线性子空间的充分必要条件是 M 对线性运算封闭, 即 M 满足:

$$\alpha x+\beta y\in M, \quad \forall\, x,y\in M. \tag{7.12}$$

X 本身和 $\{0\}$ 都是 X 的子空间, 它们被称为 X 的平凡子空间. 若 M 是 X 的子空间但 $M\neq X$, 则称 M 为 X 真子空间.

给定向量组 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\subset X$ 和数组 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\subset\mathbb{K}$, 我们称

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n \tag{7.13}$$

为向量组 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 一个的线性组合, 其中 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 称为组合系数.

设 $D\subset X$ 非空, 以 $\operatorname{span}D$ 表示由 D 中向量的一切线性组合构成的集合, 即

$$\operatorname{span}D=\Big\{\sum_{k=1}^{n} a_k x_k \;\Big|\; a_k\in\mathbb{K},\, x_k\in D,\, 1\leq k\leq n,\, n\geq 1\Big\}, \tag{7.14}$$

则 $\operatorname{span}D$ 是 X 的一个线性子空间, 称之为 D 张成的线性子空间. 可以证明 $\operatorname{span}D$ 也是 X 的包含 D 的最小线性子空间.

定义2 设 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是线性空间 X 中的一组向量. 若存在一组不全为零的数 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 使得

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0,$$

则称向量组 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 线性相关. 若向量组 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 不是线性相关的, 则称之线性无关.

可以证明: 向量组 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 线性无关的充要条件是关系式 $\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 0$ 蕴含 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

设 D 是线性空间 X 的子集. 若 D 中的任意有限个向量都线性无关, 则称 D 是 X 的一个线性无关子集.

定义4 设 D 为线性空间 X 的一个线性无关子集. 如果 $\operatorname{span} D = X$, 则称 D 为 X 的一个基, D 的基数称为 X 的维数, 记作 $\dim X$.

设 D 是线性空间 X 的一个基. 如果 D 的基数有限, 则称 X 为有限维线性空间, 否则称 X 为无穷维线性空间. 如果 X 只含零向量, 则称 X 为零维空间. 有限维线性空间的维数不随基的不同而改变.

可以证明: $\mathbb{R}^n$ 是n-维线性空间, 而 $C[a,b]$ 是无穷维线性空间.