6 压缩映射原理及其应用

本节, 我们介绍基于空间完备性的一个重要定理, 即所谓Banach压缩映射原理. 该原理在微分方程、积分方程和代数方程中有着广泛的应用, 是处理许多存在唯一性问题的有力工具.

定义1 设 (X,d) 是一个度量空间, $T\colon X\to X$ 是一个映射. 如果存在正数 $\theta\in(0,1)$, 使得对于一切 x, $y\in X$, 都有

$$d(Tx,Ty)\le\theta d(x,y),\tag{6.1}$$

则称 T 是 X 上的一个压缩映射, 其中 θ 称为压缩系数.

压缩映射的几何意义是显而易见的: 点 x, y 经过压缩映射 T 作用后, 它们的像之间的距离缩短了, 不超过 $d(x,y)$ 的 θ 倍.

定理1 (Banach压缩映射原理) 设 (X,d) 是一个完备的度量空间, $T\colon X\to X$ 是一个压缩映射, 则存在唯一的一个点 $x^*\in X$ 满足 $Tx^*=x^*$.

满足关系 $Tx=x$ 的点 x 叫做映射 T 的不动点(fixed point). Banach压缩映射原理的意义在于它揭示了如下事实: 在完备的度量空间中, 一个压缩映射有且仅有一个不动点.

定理1证明 设 T 的压缩系数为 θ, 即 θ 满足 $d(Tx,Ty)\le\theta d(x,y)$. 取 $x_0\in X$, 并定义

$$x_n=Tx_{n-1},\quad n\ge 1.\tag{6.2}$$

于是得点列 $\{x_n\}$. 下证 $\{x_n\}$ 是 X 中的Cauchy点列. 其实, 使用归纳法可以得到

$$d\big(x_{k-1},x_k\big)=d\big(Tx_{k-2},Tx_{k-1}\big)\le\theta\,d\big(x_{k-2},x_{k-1}\big)\le\cdots\le\theta^{k-1}d\big(x_0,x_1\big).$$

由此得, 对于任意 m, $n\ge 1$ (不妨设 $m<n$), 有

$$\begin{aligned}d\big(x_m,x_n\big)&\le d\big(x_m,x_{m+1}\big)+d\big(x_{m+1},x_{m+2}\big)+\cdots+d\big(x_{n-1},x_n\big)\\&\le\big(\theta^m+\theta^{m+1}+\cdots+\theta^{n-1}\big)d\big(x_0,x_1\big)\\&\le\frac{\theta^m}{1-\theta}\,d\big(x_0,x_1\big).\end{aligned}$$

此不等式表明 $\{x_n\}$ 是 X 中的一个Cauchy点列. 又由于 X 完备, 所以 $\{x_n\}$ 是 X 中的收敛点列, 即存在 $x^*\in X$ 使 $x_n\to x^*$.

下证 x^* 是 T 的不动点. 由压缩条件 $d(Tx,Ty)\le\theta d(x,y)$ 可以看出, T 是 X 上的连续映射. 于是由迭代关系式 $x_n=Tx_{n-1}$ 通过取极限可以得到 $x^*=Tx^*$, 即 x^* 是 T 的不动点.

最后验证 x^* 是 T 的唯一不动点. 其实, 如果 $x' \in X$ 满足 $Tx' = x'$, 则

$$d(x^*, x') = d(Tx^*, Tx') \le \theta\, d(x^*, x').$$

因 $0 < \theta < 1$, 故 $d(x^*, x') = 0$, 从而 $x^* = x'$. 这表明 x^* 是 T 的唯一不动点.

压缩映射原理在微分方程、积分方程和代数方程中有着广泛的应用, 是处理许多存在唯一性问题的有力工具. 作为示例, 下面我们利用压缩映射原理来证明数学分析中的隐函数定理.

隐函数定理 设二元函数 $F(x,y)$ 在带状区域 $D = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\, y \in \mathbb{R}\}$ 上连续(其中 a, b 满足 $a < b$), 并且处处有关于 y 的偏导数 $F'_y(x,y)$. 如果存在常数 m 和 M $(0 < m < M)$ 使得

$$m \le F'_y(x,y) \le M, \quad \forall\, (x,y) \in D, \tag{6.3}$$

则在区间 $[a,b]$ 上有唯一的一个连续函数 $y = \varphi(x)$ 满足

$$F\big(x, \varphi(x)\big) = 0, \quad \forall\, x \in [a,b], \tag{6.4}$$

即方程 $F(x,y) = 0$ 在闭区间 $[a,b]$ 上确定唯一的一个隐函数 $y = \varphi(x)$.

隐函数定理的压缩映射原理证法 取连续函数空间 $\big(C[a,b], d\big)$, 其中 d 为最大模距离. 对于每个 $\varphi \in C[a,b]$, 以 f_φ 表示如下函数

$$f_\varphi(x) = \varphi(x) - \frac{1}{M} F\big(x, \varphi(x)\big), \quad x \in [a,b].$$

易见 $f_\varphi \in C[a,b]$. 现定义映射 $T\colon C[a,b] \to C[a,b]$ 如下:

$$T\varphi = f_\varphi, \quad \varphi \in C[a,b]. \tag{6.5}$$

我们首先证明 $T\colon C[a,b] \to C[a,b]$ 是一个压缩映射. 其实, 如果 φ_1, $\varphi_2 \in C[a,b]$, 则由微分中值定理可得

$$|f_{\varphi_1}(x) - f_{\varphi_2}(x)| \le \big(1 - \frac{m}{M}\big)|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|, \quad x \in [a,b], \tag{6.6}$$

此式蕴含着

$$d\big(T\varphi_1, T\varphi_2\big) \le \big(1 - \frac{m}{M}\big) d(\varphi_1, \varphi_2), \tag{6.7}$$

其中, 由于 $0 < m < M$, 所以 $0 < 1 - \frac{m}{M} < 1$. 这表明 $T\colon C[a,b] \to C[a,b]$ 是一个压缩映射. 由于 $\big(C[a,b], d\big)$ 是完备的度量空间, 所以(根据压缩映射原理)存在唯一的 $\varphi \in C[a,b]$ 满足 $T\varphi = \varphi$, 即

$$\varphi(x) - \frac{1}{M} F\big(x, \varphi(x)\big) = \varphi(x), \quad \forall\, x \in [a,b],$$

等价于$F\big(x, \varphi(x)\big) = 0$, $\forall\, x \in [a,b]$.