5 度量空间的完备化

我们知道有理数集 $\mathbb{Q}$ 不完备(即 $\mathbb{Q}$ 中的Cauchy点列未必在 $\mathbb{Q}$ 中收敛). 但是有理数集 $\mathbb{Q}$ 经扩充后所得到的数集(即实数集) $\mathbb{R}$ 是完备的, 并且 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密.

本节, 我们将说明对于一般的不完备度量空间 X, 同样可以将其"扩充"为一个完备的度量空间 $\tilde{X}$, 并且可使前者在后者中稠密.

定义1 设 (X,d), (Y,ρ) 是两个度量空间. 如果存在双射 $T\colon X\to Y$ 满足

$$\rho(Tx_1,Tx_2)=d(x_1,x_2),\quad x_1,\,x_2\in X, \tag{5.1}$$

则称度量空间 (X,d) 与 (Y,ρ) 等距同构. 此时, 映射 $T\colon X\to Y$ 叫做等距同构映射.

在泛函分析中, 等距同构的两个度量空间往往不加区分, 即可以视为同一. 据此, 如果度量空间 X 与 Y 等距同构, 则可记做 $X=Y$. 例如, $\mathbb{R}^2$ 与 $\mathbb{C}$ 作为度量空间是等距同构的, 因而可以视为同一.

定理1 设 (X,d) 是一个度量空间. 则存在完备度量空间 $(\tilde{X},\tilde{d})$, 使得 X 与 $\tilde{X}$ 的某个稠密子空间 W 等距同构. 并且这样的 $\tilde{X}$ 在等距同构意义下还是唯一的.

此处, "$\tilde{X}$ 在等距同构意义下是唯一的"是指: 如果还有完备度量空间 $(\hat{X},\hat{d})$ 使得 X 与 $\hat{X}$ 的某个稠密子空间等距同构, 则 $(\tilde{X},\tilde{d})$ 与 $(\hat{X},\hat{d})$ 等距同构. 如果把等距同构的两个度量空间视为同一, 那么定理1可表述为如下形式.

定理2 设 (X,d) 是一个度量空间. 则存在唯一的完备度量空间 $(\tilde{X},\tilde{d})$, 使得 X 成为 $\tilde{X}$ 的一个稠密子空间.

注 上述完备度量空间 $(\tilde{X},\tilde{d})$ 叫做度量空间 (X,d) 的完备化空间(简称完备化).

例: 作为度量空间, 实数集 $\mathbb{R}$ 是有理数集 $\mathbb{Q}$ 的完备化; 连续函数空间 $C[a,b]$ 是多项式空间 $P[a,b]$ 的完备化.