4 Cauchy点列和完备度量空间

本节, 我们考察一类度量空间的共同属性, 即所谓完备性. 回想, 对于度量空间 (X,d) 中的一个点列 $\{x_n\}$, 如果存在 $x\in X$, 使得 $x_n\to x$, 则称 $\{x_n\}$ 是 (X,d) 中的收敛点列, 简称在 X 中收敛.

定义1 设 (X,d) 是一个度量空间. 称 X 中的点列 $\{x_n\}$ 为Cauchy点列或基本点列, 如果对任意 $\epsilon>0$, 存在 $N=N(\epsilon)$, 使得对一切 m, $n>N$, 都有 $d(x_m,x_n)<\epsilon$.

易证, 度量空间 (X,d) 中的每一个收敛点列都是Cauchy点列. 但一般情形下Cauchy点列未必都是收敛点列. Cauchy点列的收敛性与度量空间的一种属性, 即所谓完备性有关.

定义2 设 (X,d) 是一个度量空间. 如果 X 中的每个Cauchy点列都是其中的收敛点列, 则称 (X,d) 是一个完备的度量空间, 简称 X 完备.

欧式空间 $\mathbb{R}^d$ 是一个完备的度量空间, 其中 $d\geq 1$ 为正整数. 特别的, 1-维欧式空间 $\mathbb{R}^1$ (即 $\mathbb{R}$)是完备的度量空间(此即实数的完备性).

有理数集 $\mathbb{Q}$ 按绝对值距离构成一个度量空间, 但是这个空间不是完备的.

例1 l^∞ 是一个完备的度量空间.

其实, 如果 $\{x_n\}$ 是 l^∞ 中的一个Cauchy点列, 则 $\forall\, k\geq 1$, $\forall\, m$, $n\geq 1$, 有

$$|\xi_k^{(m)}-\xi_k^{(n)}|\leq d(x_m,x_n),$$

其中 $x_n=\big(\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},\cdots,\xi_k^{(n)},\cdots\big)$ 为分量表示. 由此可知, 对每个 $k\geq 1$, 数列 $\{\xi_k^{(n)}\}_{n\geq 1}$ 是一个Cauchy数列, 从而收敛. 令

$$x=\big(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,\cdots\big),$$

其中 $\xi_k=\lim_{n\to\infty}\xi_k^{(n)}$. 下证 $x\in l^\infty$ 且 $x_n\to x$. 首先, 取 $N_0\geq 1$, 使 $d(x_m,x_n)<1$, $\forall\, m$, $n>N_0$. 于是有

$$\big|\xi_k^{(n)}\big|\leq d(x_n,x_{N_0+1})+\big|\xi_k^{(N_0+1)}\big|\leq 1+M,\quad \forall\, n>N_0,\ \forall\, k\geq 1,$$

其中 $M=\sup_{k\geq 1}\big|\xi_k^{(N_0+1)}\big|$. 令 $n\to\infty$ 得 $\big|\xi_k\big|\leq 1+M$, $\forall\, k\geq 1$, 说明 $x\in l^\infty$.

其次, $\forall\,\epsilon>0$, 因 $\{x_n\}$ 是Cauchy点列, 故 $\exists N\geq 1$, 使得 $d(x_m,x_n)<\epsilon$, $\forall\, m$, $n>N$; 由此得

$$\big|\xi_k^{(m)}-\xi_k^{(n)}\big|<\epsilon,\quad \forall\, m,\, n>N,\ \forall\, k\geq 1;$$

令 $n\to\infty$ 得 $\left|\xi_k^{(m)}-\xi_k\right|\le\epsilon, \forall\, m>N, \forall\, k\ge 1$; 关于指标 $k\ge 1$ 取上确界得

$$d(x_m,x)=\sup_{k\ge 1}\left|\xi_k^{(m)}-\xi_k\right|\le\epsilon,\ \forall\, m>N.$$

从而证明了 $x_n\to x$.

设 M 是度量空间 (X,d) 的一个非空子集, 则 d 在 M 上的限制, 仍记做 d, 是 M 上的一个距离(即满足距离三公理). 因而 (M,d) 构成一个度量空间, 称之为 (X,d) 的子空间.

定理1 设 (X,d) 是一个完备的度量空间, $M\subset X$ 为一个非空子集. 则子空间 (M,d) 完备的充分必要条件是 M 为 X 中的闭集.

此定理给出了一个判断子空间完备的有用条件. 但须注意定理成立的前提条件，即 (X,d) 是一个完备的度量空间.

例2 以 C 表示全体收敛的实(或复)数列构成的集合. 在 C 上引入如下二元函数:

$$d(x,y)=\sup_{k\ge 1}|\xi_k-\eta_k|,\quad x=\{\xi_k\},\ y=\{\eta_k\}\in C. \tag{4.1}$$

则 (C,d) 是一个完备的度量空间.

其实 $C\subset l^\infty$, 从而 (C,d) 是 (l^∞,d) 的子空间. 根据定理1, 只需验证 C 是 l^∞ 的闭集, 即 $\overline{C}\subset C$, 其中 $\overline{C}$ 为 C 在 l^∞ 中的闭包.

为此设 $x\in\overline{C}$, 往证 $x\in C$. 取 $\{x_n\}\subset C$ 使得 $d(x_n,x)\to 0$. 记

$$x_n=\left(\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},\cdots,\xi_k^{(n)},\cdots\right),\quad x=\left(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,\cdots\right).$$

$\forall\,\epsilon>0$, 因 $d(x_n,x)\to 0$, 故 $\exists\, N\ge 1$, 使得 $d(x_N,x)<\frac{\epsilon}{3}$; 又由于

$$x_N=\left(\xi_1^{(N)},\xi_2^{(N)},\cdots,\xi_k^{(N)},\cdots\right)\in C,$$

所以 $\{\xi_k^{(N)}\}_{k\ge 1}$ 是Cauchy数列, 从而 $\exists\, K\ge 1$ 使得对一切 $i,\,j>K$, 有$\left|\xi_i^{(N)}-\xi_j^{(N)}\right|<\frac{\epsilon}{3}$; 于是, 对一切 $i,\,j>K$, 有

$$\begin{aligned}\left|\xi_i-\xi_j\right| &\le \left|\xi_i-\xi_i^{(N)}\right|+\left|\xi_i^{(N)}-\xi_j^{(N)}\right|+\left|\xi_j^{(N)}-\xi_j\right|\\ &\le d(x,x_N)+\left|\xi_i^{(N)}-\xi_j^{(N)}\right|+d(x_N,x)\\ &<\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}=\epsilon.\end{aligned}$$

这说明 $\{\xi_k\}_{k\ge 1}$ 是收敛数列, 从而 $x\in C$. 总之 $\overline{C}\subset C$.

例3 连续函数空间 $C[a,b]$ 是一个完备的度量空间.

证明: 设 $\{x_n\}$ 是 $C[a,b]$ 中的一个Cauchy点列, 往证 $\{x_n\}$ 在 $C[a,b]$ 中收敛. 对每个 $t \in [a,b]$, 因

$$|x_m(t) - x_n(t)| \leq \max_{a \leq s \leq b} |x_m(s) - x_n(s)| = d(x_m, x_n), \quad m, n \geq 1,$$

故 $\{x_n(t)\}$ 是一个Cauchy数列, 从而收敛. 现定义函数 $x(t)$ 如下:

$$x(t) = \lim_{n \to \infty} x_n(t), \quad t \in [a,b].$$

下证 $x \in C[a,b]$ 且 $d(x_n, x) \to 0$. 其实, $\forall \epsilon > 0$, 因 $\{x_n\}$ 为Cauchy点列, 故 $\exists N \geq 1$, 使得 $\forall m, n > N$, 成立 $d(x_m, x_n) < \epsilon$; 由此得

$$|x_m(t) - x_n(t)| < \epsilon, \quad \forall t \in [a,b], \forall m, n > N;$$

令 $n \to \infty$ 得

$$|x_m(t) - x(t)| \leq \epsilon, \quad \forall t \in [a,b], \forall m > N.$$

这说明函数列 $\{x_n(t)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 $x(t)$. 从而 $x(t)$ 连续, 即 $x \in C[a,b]$. 重复上述过程, 我们还可以证明 $d(x_n, x) \to 0$. 综上, $\{x_n\}$ 在 $C[a,b]$ 中收敛.

例4 设 $P[a,b]$ 表示闭区间 $[a,b]$ 上全体实系数多项式构成的集合. 给 $P[a,b]$ 赋以最大模距离, 则 $P[a,b]$ 是一个度量空间, 但不完备.

其实, 上述 $P[a,b]$ 是 $C[a,b]$ 的一个子空间. 根据定理1, 度量空间 $P[a,b]$ 完备的充要条件是: $P[a,b]$ 是 $C[a,b]$ 中的闭集. 可以证明: 存在多项式序列 $\{P_n(t)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于一个非多项式连续函数 $f(t)$. 此即: 存在点列 $\{P_n\} \subset P[a,b]$ 和点 $f \in C[a,b]$, 使 $P_n \to f$, 但 $f \notin P[a,b]$. 这说明 $P[a,b]$ 不是 $C[a,b]$ 的闭集, 从而度量空间 $P[a,b]$ 不完备.

例5 设 X 表示闭区间 $[0,1]$ 上的全体连续函数构成的集合. 在 X 上引入如下二元函数:

$$d(x,y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt, \quad x, \ y \in X. \tag{4.2}$$

可以证明 (X,d) 构成一个度量空间, 但不完备.

容易验证 d 是 X 上的一个距离. 为说明 (X,d) 的不完备性我们需要说明: 存在 (X,d) 中的一个Cauchy点列, 该点列在 (X,d) 中不收敛. 为此, 我们定义区间 $[0,1]$ 上的函数序列 $\{x_n(t)\}$ 如下:

$$x_n(t) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq t \leq 1; \\ n(t - \frac{1}{2}), & \frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} + \frac{1}{n}; \\ 0, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{4.3}$$

显然 $\{x_n(t)\}$ 是 $[0,1]$ 上的一列连续函数, 即 $\{x_n\}\subset X$. 又易见, 当 m, $n\geq 1$ 时(不妨设 $m<n$), 有

$$d(x_m,x_n)=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}}|x_m(t)-x_n(t)|dt\leq\frac{1}{m}.$$

从而 $\{x_n\}$ 是 (X,d) 中的一个Cauchy点列. 下面说明, 点列 $\{x_n\}$ 在 (X,d) 中不收敛.

用反证法. 反设 $\{x_n\}$ 在 (X,d) 中收敛, 则存在 $x\in X$ 使得 $d(x_n,x)\to 0$. 另一方面我们有

$$d(x_n,x)=\int_0^{\frac{1}{2}}|x(t)|dt+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}|x_n(t)-x(t)|dt+\int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{1}|1-x(t)|dt,$$

且式中$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}|x_n(t)-x(t)|dt\leq\frac{1}{n}(1+\max_{0\leq t\leq 1}|x(t)|)\to 0$. 于是, 通过取极限便得

$$0=\int_0^{\frac{1}{2}}|x(t)|dt+\int_{\frac{1}{2}}^{1}|1-x(t)|dt,$$

此式意味着

$$\int_0^{\frac{1}{2}}|x(t)|dt=0,\quad \int_{\frac{1}{2}}^{1}|1-x(t)|dt=0.$$

由于 $|x(t)|$ 和 $|1-x(t)|$ 分别是区间 $[0,\frac{1}{2}]$ 和 $[\frac{1}{2},1]$ 上的非负连续函数, 所以当 $0\leq t\leq\frac{1}{2}$ 时, $|x(t)|=0$; 当 $\frac{1}{2}\leq t\leq 1$ 时, $|1-x(t)|=0$. 此即

$$x(t)=\begin{cases}0, & 0\leq t\leq\frac{1}{2};\\ 1, & \frac{1}{2}\leq t\leq 1.\end{cases}$$

这与函数 $x(t)$ 在整个区间 $[0,1]$ 上的连续性相矛盾!