3 连续映射

在数学分析中, 函数的连续性是一个基本概念. 本节, 我们将为度量空间之间的映射引入连续性的概念. 以下, 我们总假定 (X,d) 和 (Y,ρ) 是两个给定的度量空间.

定义1 设 $T\colon X\to Y$ 是一个映射, $x_0\in X$ 为 X 中的一点. 如果对任意 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对 X 中一切满足 $d(x,x_0)<\delta$ 的 x, 都有

$$\rho(Tx,Tx_0)<\epsilon, \tag{3.1}$$

则称映射 T 在 x_0 处连续.

上述定义是一个分析形式的定义. 其实, 我们也可以给出如下拓扑形式的等价定义: 如果对 $y_0=Tx_0$ 的每个 ε-邻域 $V=V(y_0,\varepsilon)$, 相应地存在 x_0 的 δ-邻域 $U=U(x_0,\delta)$ 使得 $T(U)\subset V$, 则称映射 T 在 x_0 处连续. 此处 $T(U)=\{Tx\mid x\in U\}$.

下一定理借助于点列给出了映射在一点处连续的刻画.

定理1 设 $T\colon X\to Y$ 是一个映射, $x_0\in X$. 则 T 在 x_0 处连续的充分必要条件是: 对于 X 中满足条件 $x_n\to x_0$ 的任意点列 $\{x_n\}$, 都有 $Tx_n\to Tx_0$.

证明 必要性: 设 X 中点列 $\{x_n\}$ 满足条件 $x_n\to x_0$, 往证 $Tx_n\to Tx_0$. 其实, $\forall\epsilon>0$, 因 T 在 x_0 处连续, 故 $\exists\delta>0$ 使得对 X 中一切满足 $d(x,x_0)<\delta$ 的 x, 有 $\rho(Tx,Tx_0)<\epsilon$; 又因 $x_n\to x_0$, 故 $\exists N\geq 1$, 使得对一切 $n>N$, 有 $d(x_n,x_0)<\delta$; 于是, 对一切 $n>N$, 有 $\rho(Tx_n,Tx_0)<\epsilon$. 这说明 $Tx_n\to Tx_0$.

充分性: 用反证法. 假设 T 在 x_0 处不连续, 则 $\exists\epsilon_0>0$, 使得 $\forall\delta>0$, $\exists x\in X$ 满足 $d(x,x_0)<\delta$ 使得 $\rho(Tx,Tx_0)\geq\epsilon_0$. 特别的, 对于 $\delta=\frac{1}{n}$, $\exists x_n\in X$ 满足 $d(x_n,x_0)<\frac{1}{n}$ 使得 $\rho(Tx_n,Tx_0)\geq\epsilon_0$, 其中 $n\geq 1$. 易见, $\{x_n\}$ 是 X 中满足条件 $x_n\to x_0$ 的点列, 但 $Tx_n\nrightarrow Tx_0$. 这与已知条件矛盾! 证毕.

设 $T\colon X\to Y$ 是一个映射. 如果映射 T 在 X 的每一点处都连续, 则称 $T\colon X\to Y$ 是一个连续映射, 简称 X 连续.

下一个定理给出了两个度量空间之间连续映射的纯拓扑刻画.

定理2 设 $T\colon X\to Y$ 是度量空间 X 到度量空间 Y 的一个映射. 则 $T\colon X\to Y$ 连续的充分必要条件是: 对任意开集 $G\subset Y$, 其原像 $T^{-1}(G)=\{x\in X\mid Tx\in G\}$ 是 X 中的开集.

证明 必要性: 设 $G\subset Y$ 是开集, 往证 $T^{-1}(G)$ 为 X 中的开集. 其实, 当 $T^{-1}(G)=\emptyset$ 时, $T^{-1}(G)$ 显然为 X 中的开集.

下面考虑 $T^{-1}(G) \neq \emptyset$ 的情形. 任取 $x_0 \in T^{-1}(G)$, 因 $y_0 = Tx_0 \in G$ 且 G 是开集, 故存在 y_0 的邻域 $V = V(y_0, \epsilon) \subset G$; 另一方面, 因 T 在 x_0 处连续, 故存在 x_0 的邻域$U = U(x_0, \delta)$ 使得 $T(U) \subset V$; 从而 $U \subset T^{-1}(V) \subset T^{-1}(G)$, 说明 x_0 是 $T^{-1}(G)$ 的内点. 由 $x_0 \in T^{-1}(G)$ 的任意性便知 $T^{-1}(G)$ 为开集.

充分性: 任取 $x_0 \in X$, 往证 T 在 x_0 处连续. 对 $y_0 = Tx_0$ 的任意邻域 $V = V(y_0, \epsilon)$, 因 V 是 Y 中的开集, 故 $T^{-1}(V)$ 为 X 中的开集. 易见 $x_0 \in T^{-1}(V)$, 因而存在 x_0 的邻域$U = U(x_0, \delta)$ 使得 $U \subset T^{-1}(V)$, 这等价于 $T(U) \subset V$. 于是证明了 T 在 x_0 处连续. 证毕.