2 度量空间中的极限, 可分空间

类似于欧氏空间的情形, 度量空间中可以引进各种拓扑概念. 以下, 如无特别说明, 我们总假定 (X,d) 是一个给定的度量空间.

设 $x_0 \in X$ 为一个给定的点. 对于正数 $\varepsilon > 0$, 我们称 X 中的如下点集为开球:

$$U(x_0,\varepsilon) = \{\, x \in X \mid d(x,x_0) < \varepsilon \,\}, \tag{2.1}$$

其中 x_0 和 ε 分别称为中心和半径. 开球 $U(x_0,\varepsilon)$ 也叫做点 x_0 的 ε-邻域.

我们还可以引进内点、外点、边界点和聚点, 以及导集、闭包、开集等概念.

内点的定义 设 $M \subset X$ 为度量空间 X 的一个子集, $x_0 \in X$ 为 X 中的一点. 如果存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $U(x_0,\varepsilon) \subset M$, 则称点 x_0 为点集 M 的内点.

开集的定义 设 $M \subset X$ 为度量空间 X 的一个子集. 称 M 为开集如果 M 的每个点都是它的内点.

根据这个定义, 作为度量空间 X 的子集, 空集 $\emptyset$ 是一个开集.

极限的定义 设 $\{x_n\}$ 是度量空间 X 中的一个点列. 如果存在 $x \in X$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0, \tag{2.2}$$

则称点列 $\{x_n\}$ 为 X 中的收敛点列(简称在 X 中收敛), 并称 x 为点列 $\{x_n\}$ 的极限, 记作 $x_n \to x$.

有界集的定义 设 $M \subset X$, 即 M 是度量空间 X 的一个子集. 若

$$\delta(M) \overset{\triangle}{=} \sup\{d(x,y) \mid x,\, y \in M\} < \infty, \tag{2.3}$$

则称 M 为度量空间 X 中的有界集(简称 M 有界), 其中 $\delta(M)$ 称为 M 的直径.

容易证明, 点集 $M \subset X$ 有界的充分必要条件是存在点 $x_0 \in X$ 和正数 $\varepsilon > 0$ 使 $M \subset U(x_0,\varepsilon)$. 此外, 如果 $\{x_n\}$ 是度量空间 X 中的收敛点列, 则 $\{x_n\}$ 构成的点集一定是 X 中的有界集, 即点列 $\{x_n\}$ 有界.

需要注意的是, 在一般度量空间中有界点列未必是收敛的.

如果一个点集包含它的所有聚点, 那么这个点集就称为一个闭集. 在度量空间中, 我们可以直接利用点列来刻画一个闭集.

闭集的分析特征 点集 $M \subset X$ 为闭集的充分必要条件是若 $\{x_n\} \subset M$ 且 $x_n \to x$, 则 $x \in M$.

如同度量空间本身一样, 度量空间中点列的收敛是一个高度抽象的概念. 在具体空间中, 点列的收敛往往具有其具体意义.

欧式空间中收敛的具体意义 设 $\mathbb{R}^d$ 为 d-维欧式空间, $\{x_n\}$ 是其中的一个点列, $x \in \mathbb{R}^d$. 容易验证: 点列 $\{x_n\}$ 按欧式距离收敛于 x 等价于对于每个下标 $1 \leq k \leq d$, 有

$$\xi_k^{(n)} \to \xi_k \quad (\text{当 } n \to \infty \text{ 时}),$$

其中 $x_n = \big(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(2)}, \cdots, \xi_d^{(n)}\big)$, $x = \big(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_d\big)$.

可见, 欧式空间中点列的收敛其实就是按坐标(或分量)的收敛.

回想, 函数列 $\{x_n(t)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 $x(t)$ 是指: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \geq 1$ 使得对一切 $n > N$ 和一切 $t \in [a,b]$ 成立

$$|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon.$$

下面的讨论表明, $C[a,b]$ 中的收敛其实就是函数列的一致收敛.

空间 $C[a,b]$ 中收敛的具体意义 设 $\{x_n\}$ 是 $C[a,b]$ 中的一个点列, $x \in C[a,b]$. 容易验证: 点列 $\{x_n\}$ 按空间 $C[a,b]$ 中的最大模距离收敛于点 x 等价于函数列 $\{x_n(t)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 $x(t)$.

空间 S 中收敛的具体意义 设 $\{x_n\}$ 是序列空间 S 中的一个点列, $x \in S$. 则点列 $\{x_n\}$ 按 S 中的距离收敛于点 x 等价于$\{x_n\}$ 按坐标(或分量)收敛于 x, 即对于每个 $k \geq 1$, 有

$$\xi_k^{(n)} \to \xi_k, \quad (\text{当 } n \to \infty \text{ 时}),$$

其中 $x_n = \{\xi_k^{(n)}\}_{k\geq 1}$, $x = \{\xi_k\}_{k \geq 1}$.

为证明上述结论, 我们需要利用如下关于数列收敛性的一个有用结果: 数列 $\{a_n\}$ 收敛于数 a 的充分必要条件是 $\frac{|a_n - a|}{1+|a_n - a|} \to 0$. (请自证!)

设 $X \subset \mathbb{R}^d$ 是一个非空的L可测集, 并且 $m(X) < \infty$. 以 $\mathfrak{M}(X)$ 表示定义在 X 上的全体实值L可测函数构成的集合, 并赋以如前一节所示的距离.

空间 $\mathfrak{M}(X)$ 中收敛的具体意义 设 $\{f_n\}$ 是可测函数空间 $\mathfrak{M}(X)$ 中的一个点列, $f \in \mathfrak{M}(X)$. 则点列 $\{f_n\}$ 按 $\mathfrak{M}(X)$ 中的距离收敛于点 f 等价于函数列 $\{f_n\}$ 在 X 上依测度收敛于函数 f, 即: $\forall \sigma > 0$, 有 $\lim_{n\to\infty} m\big(X[|f_n - f| \geq \sigma]\big) = 0$.

上述结论可通过如下关于L积分的两个重要不等式得到证明. 设 f, $g \in \mathfrak{M}(X)$, 则对任意 $\sigma > 0$ 成立:

$$\int_X \frac{|f(t)-g(t)|}{1+|f(t)-g(t)|}dt \leq m\big(X[|f-g| \geq \sigma]\big) + \frac{\sigma}{1+\sigma}m(X), \tag{2.4}$$

和

$$m\big(X[|f-g| \geq \sigma]\big) \leq \frac{1+\sigma}{\sigma}\int_X \frac{|f(t)-g(t)|}{1+|f(t)-g(t)|}dt. \tag{2.5}$$

从上述讨论中可以看出, 尽管各种收敛的具体方式和意义不同, 但当我们引入适当的距离后, 它们都可以统一为度量空间中按距离的收敛.

为了深入揭示度量空间的拓扑属性, 我们下面引入点集的稠密性概念和可分性概念.

定义1 设 M, E 是度量空间 X 的两个子集. 若 M 的闭包含 E, 即 $\overline{M} \supset E$, 则称点集 M 在点集 E 中稠密. 特别地, 若 M 在度量空间 X 中稠密, 则称 M 为 X 的稠密子集. 若度量空间 X 有一个稠密子集, 则称 X 是可分的.

例1 欧式空间 $\mathbb{R}^d$ 是可分的. 其实, $\mathbb{R}^d$ 中的全体有理点(即每个坐标都是有理数的点)构成的点集 $\mathbb{Q}^d$ 就是 $\mathbb{R}^d$ 的一个可数稠密子集.

例2 离散度量空间 X 可分的充分必要条件是 X 本身是可数集合. 其实, X 的每个子集都是闭集, 因而 X 的稠密子集只有其本身. 由此可知, X 可分的充分必要条件是 X 本身是可数集.

例3 以 l^∞ 表示全体有界实(或复)数列构成的集合. 在 l^∞ 中可以引进如下距离使之成为度量空间:

$$d(x,y) = \sup_{k\geq 1}|\xi_k - \eta_k|, \tag{2.6}$$

其中 $x = \{\xi_k\}$, $y = \{\eta_k\} \in l^\infty$. 可以证明, 度量空间 l^∞ 是不可分的.