1 度量空间的定义及例

极限是数学分析中的基本概念之一. 本节我们将展示极限概念可以推广到更一般的结构, 即度量空间(metric space).

定义1 设 X 为一非空集合, $d=d(\cdot,\cdot)$ 是 X 上的一个二元函数. 若 d 满足: 对任意 $x,\, y,\, z\in X$, 成立

(1) 正定性: $d(x,y)\geq 0$ 并且 $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;

(2) 对称性: $d(x,y)=d(y,x)$;

(3) 三角不等式: $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$,

则称 $d=d(\cdot,\cdot)$ 是 X 上的一个距离, 并称 (X,d) 为度量空间.

度量空间也称为距离空间, 其元素通常叫做点. 设 x, y 是度量空间 (X,d) 中的两个点, 则称 $d(x,y)$ 为 x 与 y 之间的距离. 定义1中的条件1、条件2和条件3常称为距离三公理, 其中条件2和条件3 也可用下一个条件来代替:

$$d(x,y)\leq d(x,z)+d(y,z),\quad \forall\, x,\, y,\, z\in X. \tag{1.1}$$

容易验证, 在 $\mathbb{R}^n$ 上定义的如下二元函数是一个距离(称为欧氏距离):

$$d(x,y)=\sqrt{(s_1-t_1)^2+(s_2-t_2)^2+\cdots+(s_n-t_n)^2}, \tag{1.2}$$

其中 $x=(s_1,s_2,\cdots,s_n)$, $y=(t_1,t_2,\cdots,t_n)\in\mathbb{R}^n$. 因此 $(\mathbb{R}^n,d)$ 构成一个度量空间, 称为 n 维欧氏空间.

例1 设 X 为一非空集合, 定义 X 上的二元函数 $d=d(\cdot,\cdot)$ 如下:

$$d(x,y)=\begin{cases}1, & \text{当}x\neq y;\\ 0, & \text{当}x=y.\end{cases} \tag{1.3}$$

其中 $x,\, y\in X$. 容易验证 $d=d(\cdot,\cdot)$ 是 X 上的一个距离(即满足定义1中的三个条件), 从而 (X,d) 构成一个度量空间, 称为离散度量空间.

此例表明, 任意非空集合上总可以定义一个距离, 使之成为一个度量空间. 值得指出的是离散度量空间的每一个子集都是它的开集. 这样的度量空间并无多少实际用处.

例2 设 S 表示全体实数数列构成的集合(或全体复数数列构成的集合), 定义 S 上的二元函数 $d=d(\cdot,\cdot)$ 如下:

$$d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|},\quad x,\, y\in S, \tag{1.4}$$

其中 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k, \cdots)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_k, \cdots)$. 则 d 是 S 上的一个距离, 从而 (S, d) 构成一个度量空间, 称为序列空间.

其实, $d(\cdot, \cdot)$ 显然满足正定性条件和对称性条件(即定义1中的条件1和条件2). 下面验证它也满足三角不等式, 为此我们首先证明如下分式不等式:

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \le \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|} \tag{1.5}$$

其中 a, b 为任意两个复数. 其实, 函数 $f(t) = \frac{t}{1+t}$ 是区间 $[0, \infty)$ 上的一个增函数. 由于 $|a+b| \le |a| + |b|$, 所以

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \le \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} = \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \le \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

现在设 x, y, $z \in S$ 并且

$$\begin{aligned} x &= (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k, \cdots), \\ y &= (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_k, \cdots), \\ z &= (\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_k, \cdots). \end{aligned}$$

则由不等式 $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \le \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$ 可得

$$\frac{|\xi_k - \eta_k|}{1+|\xi_k - \eta_k|} = \frac{|(\xi_k - \zeta_k) + (\zeta_k - \eta_k)|}{1+|(\xi_k - \zeta_k) + (\zeta_k - \eta_k)|} \le \frac{|\xi_k - \zeta_k|}{1+|\xi_k - \zeta_k|} + \frac{|\zeta_k - \eta_k|}{1+|\zeta_k - \eta_k|},$$

其中 $k \ge 1$. 给上述不等式两端分别乘以因子 $\frac{1}{2^k}$ 然后求和得

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1+|\xi_k - \eta_k|} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \zeta_k|}{1+|\xi_k - \zeta_k|} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\zeta_k - \eta_k|}{1+|\zeta_k - \eta_k|},$$

即 $d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y)$. 这样我们便验证了上述 (S, d) 是一个度量空间. 有趣的是, 在序列空间 (S, d) 上总成立

$$d(x, y) \le 1, \quad \forall\, x, y \in S.$$

这表明序列空间 (S, d) 本身是有界的(见后面章节的有关讨论).

例3 设 Ω 是一个非空集合, 以 $B(\Omega)$ 表示 Ω 上的全体实值函数(或复值函数)构成的集合. 定义 $B(\Omega)$ 上的二元函数 $d = d(\cdot, \cdot)$ 如下:

$$d(f, g) = \sup_{\omega \in \Omega} |f(\omega) - g(\omega)|, \quad f, g \in B(\Omega). \tag{1.6}$$

则 d 是 $B(\Omega)$ 上的一个距离, 从而 $(B(\Omega), d)$ 构成一个度量空间, 称为有界函数空间.

其实, 利用上确界的性质容易看出 d 具有正定性和对称性, 结合绝对值(或模)的性质可进一步看出 d 满足三角不等式. 当 $\Omega=[a,b]$ 时, 我们将 $B(\Omega)$ 改记为 $B[a,b]$.

例4 设 $X\subset\mathbb{R}^n$ 是一个非空的L可测集, 并且 $m(X)<\infty$. 以 $\mathfrak{M}(X)$ 表示定义在 X 上的全体实值(或复值)L可测函数构成的集合. 对于 $f,\,g\in\mathbb{R}^n$, 当 $f(t)=g(t)$ a.e.于X 时, 规定 $f=g$. 在 $\mathfrak{M}(X)$ 上定义如下二元函数:

$$d(f,g)=\int_X\frac{|f(t)-g(t)|}{1+|f(t)-g(t)|}dt,\quad f,\,g\in\mathfrak{M}(X). \tag{1.7}$$

则 d 是 $\mathfrak{M}(X)$ 上的一个距离, 从而 $(\mathfrak{M}(X),d)$ 构成一个度量空间, 称为可测函数空间.

其实, 上述二元函数 $d=d(\cdot,\cdot)$ 显然满足正定性和对称性. 利用不等式 $\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\le\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$ 还可以证明 d 满足三角不等式, 因此 d 是 $\mathfrak{M}(X)$ 上的一个距离.

例5 以 $C[a,b]$ 表示定义在区间 $[a,b]$ 上的全体实值(或复值)连续函数构成的集合. 在 $C[a,b]$ 上定义如下二元函数:

$$d(x,y)=\max_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|,\quad x,\,y\in C[a,b]. \tag{1.8}$$

则 d 是 $C[a,b]$ 上的一个距离, 从而 $(C[a,b],d)$ 构成一个度量空间, 称为连续函数空间.

文献中常把上述距离叫做 $C[a,b]$ 上的最大模距离. 后面我们将会看到, $C[a,b]$ 上还可以引进其它形式的重要距离, 如著名的 L^p 距离.

设 $x=\{x_k\}$ 是一个实数数列. 称 $x=\{x_k\}$ 是平方可和的, 如果其平方和有限, 即 $\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2<\infty$.

例6 以 l^2 表示全体平方可和的实数数列构成的集合. 在 l^2 上定义二元函数 $d=d(\cdot,\cdot)$ 如下:

$$d(x,y)=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-y_k)^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{1.9}$$

其中 $x=\{x_k\},\,y=\{y_k\}\in l^2$. 则 d 是 l^2 上的一个距离, 从而 (l^2,d) 构成一个度量空间, 称为 l^2 空间.

只验证三角不等式. 为此设 $x=\{x_k\},\,y=\{y_k\},\,z=\{z_k\}\in l^2$. 对于 $n\ge1$, 以 $d^{(n)}$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的欧氏距离, 并且取

$$x^{(n)}=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad y^{(n)}=(y_1,y_2,\cdots,y_n),\quad z^{(n)}=(z_1,z_2,\cdots,z_n),$$

则 $x^{(n)},\,y^{(n)},\,z^{(n)}\in\mathbb{R}^n$, 从而有

$$d^{(n)}\big(x^{(n)},y^{(n)}\big)\le d^{(n)}\big(x^{(n)},z^{(n)}\big)+d^{(n)}\big(z^{(n)},y^{(n)}\big)\le d(x,z)+d(z,y).$$

令 $n \to \infty$, 并且注意到 $d^{(n)}\big(x^{(n)}, y^{(n)}\big) \to d(x,y)$, 便得 $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$. 这说明 d 满足三角不等式.