西北师范大学物理与电子工程学院

函授教育 2006 年暑期数学物理方法课程检测试卷

班级：________________ 学号：________________

姓名：________________ 任课教师：________________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
分数							

一、填空题 (每空 2 分，共 40 分)

1. 复数 $z=1+i$，它的模为__________，主辐角为__________，辐角为__________，三角形式为__________，指数形式为__________.

2. 对函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，柯西—黎曼条件为__________,此条件是函数 $f(z)$ 可导的__________条件.

3. 若函数 $f(z)$ 在点 z_0 不解析，则称 z_0 点为 $f(z)$ 的__________.

4. 幂级数在__________内可以逐项求导或逐项积分.

5. 孤立奇点可以分为__________、__________、__________.

6. 在数学物理方程中，边界条件和__________条件都称为定解条件，泛定方程加上定解条件，称为__________问题.

7. 在数学上，人们把二阶线性偏微分方程分为三类，分别为__________方程、__________方程、__________方程.

8. 弦振动方程的形式为__________.

9. 一维热传导方程的形式为______________________________.

10. 方程 $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}-2x\dfrac{dy}{dx}+6y=0$ 称为______阶勒让德微分方程.

请考生注意：以下各题必须写出主要步骤！

二、(**10** 分)已知 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 为解析函数, 其中 $u(x,y)=x^2-y^2$, 且 $f(0)=0$. 求其虚部 $v(x,y)$ 和函数 $f(z)$.

三、(**10** 分)计算积分 $\int_{|z|=2}\dfrac{dz}{z^2-1}$.

四、(**10** 分)一根长为 l 的均匀细杆，它的初温为常数 u_0，其两端的温度保持为 0. 请写出此细杆上温度分布满足的定解问题(只写出该定解问题, 不需求解).

五、(**20** 分)用分离变量法求解混合问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} & (0<x<l,t>0) \\ u(0,t)=0,u(l,t)=0 & (t\ge 0) \\ u(x,0)=\sin\dfrac{\pi x}{l}, \quad u_t(x,0)=0 & (0\le x\le l) \end{cases}.$$

要求写出完整过程.

六、(**10** 分)求解无限长弦的自由横振动. 设弦的初始位移为 $\sin x$,初始速度为 $\cos x$.

参考答案

一、填空题 (每空 2 分，共 40 分)

1. $\sqrt{2}$，$\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{\pi}{4}+2k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$，$z=\sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4})$，$z=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

2. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$，必要.

3. 奇点.

4. 收敛圆.

5. 可去奇点、极点、本性奇点.

6. 初始，定解.

7. 双曲型、抛物型、椭圆型.

8. $u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t)$.

9. $u_t-a^2u_{xx}=f(x,t)$.

10. 2.

二、(10 分)

解：此题一般可用三种方法求解：曲线积分法，凑全微分显示法，不定积分法

1、曲线积分法

$\because dv=\dfrac{\partial v}{\partial x}dx+\dfrac{\partial v}{\partial y}dy \xlongequal{C-R条件} -\dfrac{\partial u}{\partial y}dx+\dfrac{\partial u}{\partial x}dy=2ydx+2xdy$，

$\therefore v(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}2ydx+2xdy+C=\int_{(0,0)}^{(x,0)}2ydx+2xdy+\int_{(x,0)}^{(x,y)}2ydx+2xdy+C$

$=\int_{(x,0)}^{(x,y)}2xdy+C=2xy+C \qquad (C\in R)$

$\therefore f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=x^2-y^2+i(2xy+C)=z^2+iC$

又$\because f(0)=0$，$\therefore C=0$，因此 $f(z)=z^2$.

2、凑全微分显示法

$\because dv=\dfrac{\partial v}{\partial x}dx+\dfrac{\partial v}{\partial y}dy \xlongequal{C-R条件} -\dfrac{\partial u}{\partial y}dx+\dfrac{\partial u}{\partial x}dy=2ydx+2xdy=d(2xy)$

$\therefore v(x,y)=2xy+C$, $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=x^2-y^2+i(2xy+C)=z^2+iC$

又$\because f(0)=0$，$\therefore C=0$，因此 $f(z)=z^2$.

3、不定积分法

$\because \dfrac{\partial u}{\partial x}=2x,\dfrac{\partial u}{\partial y}=-2y$，$\therefore$ 由 C-R 条件得：$\dfrac{\partial v}{\partial x}=2y,\dfrac{\partial v}{\partial y}=2x$

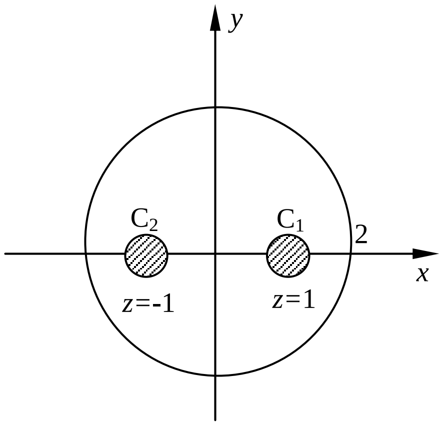
对$\dfrac{\partial v}{\partial y}=2x$两边取不定积分可得$v=\int 2xdy=2xy+\varphi(x)$，因此$\dfrac{\partial v}{\partial x}=2y+\varphi'(x)$

又$\because \dfrac{\partial v}{\partial x}=2y \Rightarrow \varphi'(x)=0 \therefore \varphi(x)=C, v(x,y)=2xy+C$

$\therefore f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=x^2-y^2+i(2xy+C)=z^2+iC$

又$\because f(0)=0$，$\therefore C=0$，因此$f(z)=z^2$.

三、(10 分)



根据复合闭路定理，有

$$\int_{|z|=2}\frac{dz}{z^2-1}=\int_{C_1}\frac{dz}{z^2-1}+\int_{C_2}\frac{dz}{z^2-1}=\frac{1}{2}\int_{C_1}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)dz+\frac{1}{2}\int_{C_2}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)dz$$

$$=\frac{1}{2}\int_{C_1}\frac{1}{z-1}dz-\frac{1}{2}\int_{C_1}\frac{1}{z+1}dz+\frac{1}{2}\int_{C_2}\frac{1}{z-1}dz-\frac{1}{2}\int_{C_2}\frac{1}{z+1}dz$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i-\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 0-\frac{1}{2}\cdot 2\pi i=0.$$

四、(10 分)

解：该定解问题为$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=0 & (0<x<l, t>0) \\ u(0,t)=0, u(l,t)=0 & (t\geq 0) \\ u(x,0)=u_0 & (0<x<l) \end{cases}$.

五、(20 分)

解：1. **变量分离**

设$u(x,t)=T(t)X(x)$，代入泛定方程得$\begin{cases}T''(t)+\lambda a^2T(t)=0\\X''(x)+\lambda X(x)=0\end{cases}$，其中$\lambda$为分离常数. 将$u(x,t)=T(t)X(x)$代入边界条件得$X(0)=X(l)=0$.

2. **求解特征值问题**$\begin{cases}X''(x)+\lambda(x)=0\\X(0)=0,X(l)=0\end{cases}$

特征值$\lambda_n=\dfrac{n^2\pi^2}{l^2}$，特征函数$X_n(x)=\sin\dfrac{n\pi x}{l}$，$n=1,2,\cdots$

3. **求解常微分方程**$T''(t)+\lambda_n a^2T(t)=0$

$T_n(t)=C_n\cos\dfrac{n\pi at}{l}+D_n\sin\dfrac{n\pi at}{l}$，其中$C_n,D_n$为任意常数. 得一系列特解

$$u_n(x,t)=T_n(t)X_n(x)=(C_n\cos\frac{n\pi at}{l}+D_n\sin\frac{n\pi at}{l})\sin\frac{n\pi x}{l},\ n=1,2,\cdots$$

4. **特解的叠加**

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\cos\frac{n\pi at}{l}+D_n\sin\frac{n\pi at}{l})\sin\frac{n\pi x}{l}$$

5. **利用初始条件确定叠加系数**

$$u(x,0)=\sin\frac{\pi x}{l}=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{l}\Rightarrow C_1=1,C_n=0(n\neq1)$$

$$u_t(x,0)=0=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{l}D_n\sin\frac{n\pi x}{l}\Rightarrow,D_n=0$$

该混合问题的解为$u(x,t)=\cos\dfrac{\pi at}{l}\sin\dfrac{\pi x}{l}$.

六、(**10** 分)

解：此无限长弦的自由横振动满足的定解问题为:

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx} & (-\infty<x<\infty,t>0)\\u(x,0)=\sin x & (-\infty<x<\infty)\\u_t(x,0)=\cos x & (-\infty<x<\infty)\end{cases}$$

利用 D’Alembert 公式$u(x,t)=\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha$，这里$\varphi(x)=\sin x,\psi(x)=\cos x$，得

$$u(x,t)=\frac{\sin(x+at)+\sin(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}[\sin(x+at)-\sin(x-at)].$$