西北师范大学物理与电子工程学院

2005—2006 学年度第 2 学期《数学物理方法》课程期末考试试卷(B 卷)

系别：物理系　专业：物理学　级别：________　班级：________

学号：________　姓名：____________　任课教师：洪学仁

题号	一	二	三	四	总分
分数					

请考生注意：第一题答案填写在试卷上，第二、三、四题写清楚试题编号，解答过程写在答卷用纸上，请尽量保持卷面整洁。

一、单项选择题 (每小题 **2** 分，共 **20** 分)

1. 杆的微小横振动方程 $u_{tt}-a^2u_{xxxx}=0$ 是(　　　　)阶线性偏微分方程.

   A．1　　B．2　　C．3　　D．4

2. 偏微分方程 $u_{tt}=a^2\Delta u$ 是(　　　　).

   A．Laplace 方程　　B．波动方程　　C．Poisson 方程　　D．热传导方程

3. 定解问题 $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & (0<x<a,0<y<b) \\ u_x(0,y)=A,\ u_x(a,y)=A & (0\le y\le b) \\ u_y(x,0)=B,\ u_y(x,b)=B & (0\le x\le a) \end{cases}$ 是(　　　　).

   A．初值问题　　B．第一边值问题　　C．第二边值问题　　D．第三边值问题

4. 定解问题 $\begin{cases} u_t=a^2u_{xx} & (0<x<+\infty,t>0) \\ u(0,t)=0 & (t\ge 0) \\ u(x,0)=u_0 & (0\le x<+\infty) \end{cases}$ 是(　　　　).

   A．初值问题　　B．边值问题　　C．混合问题　　D．半无限问题

5. $\delta(x)$ 是(　　　　).

   A．偶函数　　B．奇函数　　C．非奇非偶函数　　D．A,B,C 均不对

6. $erfc(x)=1-\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\xi^2}d\xi$ 叫做(　　　　).

   A．误差函数　　B．余误差函数　　C．Gauss 函数　　D．Heaviside 单位函数

7. $\sin nx\quad (n=1,2,\cdots)$ 是本征值问题(　　　　)的本征函数.

A. $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = 0, X(\pi) = 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = 0, X'(\pi) = 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = 0, X(\pi) = 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = 0, X'(\pi) = 0 \end{cases}$

8. 混合问题能够用分离变量法求解的必要条件是(　　　　).

A. 泛定方程和初始条件为齐次　B. 初始条件和边界条件为齐次

C. 泛定方程和边界条件为齐次　D. 泛定方程、初始和边界条件均为齐次

9. 已知定解问题 $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t) & (0 < x < l, t > 0) \\ u(0,t) = 0, u(l,t) = 0 & (t \ge 0) \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0 & (0 \le x \le l) \end{cases}$，对应的格林函数 $G(x,t;\xi,\tau)$ 满足的定解问题为(　　　　).

A. $\begin{cases} G_{tt} - a^2 G_{xx} = 0 & (0 < x < l, t > 0) \\ G(0,t) = 0, G(l,t) = 0 & (t \ge 0) \\ G(x,0) = 0, G_t(x,0) = \delta(x-\xi) & (0 \le x \le l) \end{cases}$ B. $\begin{cases} G_{tt} - a^2 G_{xx} = 0 & (0 < x < l, t > 0) \\ G(0,t) = 0, G(l,t) = 0 & (t \ge 0) \\ G(x,\tau) = 0, G_t(x,\tau) = \delta(x-\xi) & (0 \le x \le l) \end{cases}$

C. $\begin{cases} G_{tt} - a^2 G_{xx} = 0 & (0 < x < l, t > 0) \\ G(0,t) = 0, G(l,t) = 0 & (t \ge 0) \\ G(x,0) = 0, G_t(x,0) = f(x,\tau) & (0 \le x \le l) \end{cases}$ D. $\begin{cases} G_{tt} - a^2 G_{xx} = 0 & (0 < x < l, t > 0) \\ G(0,t) = 0, G(l,t) = 0 & (t \ge 0) \\ G(x,\tau) = 0, G_t(x,\tau) = f(x,\tau) & (0 \le x \le l) \end{cases}$

10. 方程 $(1-x^2)\dfrac{d^2 y}{dx^2} - 2x\dfrac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0 \quad (n = 0,1,2,\cdots)$ 的解为(　　　　).

A. 整数阶 Bessel 函数　B. Laguerre 多项式

C. Legendre 多项式　D. 连带 Legendre 多项式

二、(5 分) Laplace 方程在平面极坐标系下的形式为 $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$. 试求出 Laplace 方程的圆对称解(**提示**：u 与 θ 无关).

三、写出定解问题 (每小题 **10** 分，共 **20** 分)

说明：只写出相应定解问题，不需求解.

1. 今有一弦，其两端 $x=0$ 与 $x=l$ 被钉子固定，作自由振动，它的初位移为 0，初速度为 $\psi(x) = \begin{cases} c & (x \in [\alpha,\beta]) \\ 0 & (x \notin [\alpha,\beta]) \end{cases}$，其中 c 为已知常数，$0 < \alpha < \beta < l$. 请写出此弦振动满足的定解问题.

2. 一根长为l的均匀细杆，在$x=0$端绝热，另一端$x=l$温度保持为常温u_0，初始温度分布为$\dfrac{u_0}{l}x$. 请写出此细杆上温度分布满足的定解问题.

四、求解定解问题 (共 **55** 分)

1. (**25** 分) 用**分离变量法**求解热传导方程的混合问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & (0<x<l, t>0) \\ u(0,t)=0,\ \ u(l,t)=0 & (t\ge 0) \\ u(x,0)=\sin\dfrac{\pi x}{l} & (0\le x\le l) \end{cases},$$

要求写出完整过程.

2. (**15** 分) 用 **Fourier 级数法**求解外力作用下的弦振动问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx} = \cos\dfrac{2\pi x}{l}\sin 2\omega t & (0<x<l, t>0) \\ u_x(0,t)=0,\ \ u_x(l,t)=0 & (t\ge 0) \\ u(x,0)=0,\ \ u_t(x,0)=0 & (0\le x\le l) \end{cases}.$$

已知非齐次常微分方程初值问题$\begin{cases} T_n''(t)+\dfrac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n(t)=f_n(t) \\ T_n(0)=A_n, T_n'(0)=B_n \end{cases}$

的解为：$T_n(t)=A_n\cos\dfrac{n\pi a}{l}t+B_n\dfrac{l}{n\pi a}\sin\dfrac{n\pi a}{l}t+\dfrac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\dfrac{n\pi a(t-\tau)}{l}d\tau$.

3. (**15** 分) 求解无限长弦的自由横振动并说明解的物理意义. 设弦的初始位移为0，初始速度为$\cos x$.

参考答案

一、单项选择题 (每小题 **2** 分，共 **20** 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	B	C	D	A	B	A	C	B	C

二、(5 分)

解：在平面极坐标系下，如果u与θ无关，即得圆对称解满足的方程为$\frac{d}{dr}(r\frac{du}{dr})=0$，积分两次可得圆对称解：$u(r)=C_1\ln r+C_2(r\neq 0)$，$C_1,C_2$为积分常数，令$C_1=-1,C_2=0$，可得$u(r)=\ln\frac{1}{r}(r\neq 0)$.

三、写出定解问题 (每小题 **10** 分，共 **20** 分)

1. **解**：该定解问题为$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 & (0<x<l,t>0) \\ u(0,t)=0,u(l,t)=0 & (t\geq 0) \\ u(x,0)=0 & (0\leq x\leq l) \\ u_t(x,0)=\begin{cases} c & (x\in[\alpha,\beta]) \\ 0 & (x\notin[\alpha,\beta]) \end{cases} & (0<\alpha<\beta<l,0\leq x\leq l) \end{cases}$.

2. **解**：该定解问题为$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=0 & (0<x<l,t>0) \\ u_x(0,t)=0,u(l,t)=u_0 & (t\geq 0) \\ u(x,0)=\frac{u_0}{l}x & (0\leq x\leq l) \end{cases}$.

四、求解定解问题 (共 **55** 分)

1. **(25** 分)

解：(1) 变量分离

设$u(x,t)=T(t)X(x)$，代入泛定方程得$\begin{cases} T'(t)+\lambda a^2T(t)=0 \\ X''(x)+\lambda X(x)=0 \end{cases}$，其中$\lambda$为分离常数. 将$u(x,t)=T(t)X(x)$代入边界条件得$X(0)=X(l)=0$.

(2)求解特征值问题$\begin{cases} X''(x)+\lambda(x)=0 \\ X(0)=0,X(l)=0 \end{cases}$

特征值$\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{l^2}$，特征函数$X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l}$，$n=1,2,\cdots$

(3) 求解常微分方程$T'(t)+\lambda_n a^2 T(t)=0$

$T_n(t)=C_n e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t}$，其中$C_n$为任意常数. 得一系列特解

$u_n(x,t)=T_n(t)X_n(x)=C_n e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t}\sin\frac{n\pi x}{l}$， $n=1,2,\cdots$

(4) 特解的叠加

$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t}\sin\frac{n\pi x}{l}$

(5) 利用初始条件确定叠加系数

$u(x,0)=\sin\frac{\pi x}{l}=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{l}\Rightarrow C_1=1,C_n=0(n\neq 1)$

或$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx\Rightarrow C_1=1,C_n=0(n\neq 1)$

该定解问题的解为$u(x,t)=e^{-\frac{\pi^2a^2}{l^2}t}\sin\frac{\pi x}{l}$.

2. (**15** 分)

解：用 **Fourier** 级数法求解.

级数展开的基本函数应是相应的齐次泛定方程$u_{tt}-a^2u_{xx}=0$在所给边界条件

$u_x(0,t)=0$,$u_x(l,t)=0$下的本征函数$\cos\frac{n\pi x}{l}(n=0,1,2,\cdots)$.

(1) 设$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)\cos\frac{n\pi x}{l}$,

A. 代入泛定方程，有$\sum_{n=0}^{\infty}\left(T_n''+\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n\right)\cos\frac{n\pi x}{l}=\cos\frac{2\pi x}{l}\sin 2\omega t$，比较方程两边的系数，分离出$T_n(t)$的常微分方程：$T_2''+\frac{4\pi^2a^2}{l^2}T_2=\sin 2\omega t$, $T_n''+\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n=0(n\neq 2)$.

B. 代入初始条件，有

$$u(x,0)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(0)\cos\frac{n\pi x}{l}=0,\qquad u_t(x,0)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n'(0)\cos\frac{n\pi x}{l}=0.$$

可得，$T_n(0)=0,\qquad T_n'(0)=0$.

因此，有$\begin{cases} T_2''+\dfrac{4\pi^2a^2}{l^2}T_2=\sin 2\omega t \\ T_2(0)=0,T_2'(0)=0 \end{cases}$，$\begin{cases} T_n''+\dfrac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n=0 \\ T_n(0)=0,T_n'(0)=0 \end{cases}(n\neq 2)$.

(2) 求解$\begin{cases} T_2''+\dfrac{4\pi^2a^2}{l^2}T_2=\sin 2\omega t \\ T_2(0)=0,T_2'(0)=0 \end{cases}$，$\begin{cases} T_n''+\dfrac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n=0 \\ T_n(0)=0,T_n'(0)=0 \end{cases}(n\neq 2)$

A. 求解$\begin{cases} T_2''+\dfrac{4\pi^2a^2}{l^2}T_2=\sin 2\omega t \\ T_2(0)=0,T_2'(0)=0 \end{cases}$

代公式，可得$T_1(t)=\dfrac{l}{2\pi a}\displaystyle\int_0^t \sin 2\omega\tau \sin\dfrac{\pi a(t-\tau)}{l}d\tau$.

B. 求解$\begin{cases} T_n''+\dfrac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n=0 \\ T_n(0)=0,T_n'(0)=0 \end{cases}(n\neq 2)$

$n=0$时，$T_0(t)=C_0+D_0t$，由$T_0(0)=0,T_0'(0)=0$得$C_0=0,D_0=0\Rightarrow T_0(t)\equiv 0$.

$n\neq 0,2$时，$T_n(t)=C_n\cos\dfrac{n\pi a}{l}t+D_n\sin\dfrac{n\pi a}{l}t$，由$T_n(0)=0,T_n'(0)=0$

得$C_n=0,D_n=0\Rightarrow T_n(t)\equiv 0(n\neq 0,2)$.

(3) 该定解问题的解为：$u(x,t)=T_2(t)\cos\dfrac{2\pi x}{l}=\dfrac{l}{2\pi a}\cos\dfrac{2\pi x}{l}\displaystyle\int_0^t \sin 2\omega\tau\sin\dfrac{\pi a(t-\tau)}{l}d\tau$.

3. (**15** 分)

解：此无限长弦的自由横振动满足的定解问题为:$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} & (-\infty(<x<\infty,t>0) \\ u(x,0)=0 & (-\infty<x<\infty) \\ u_t(x,0)=\cos x & (-\infty<x<\infty) \end{cases}$

利用 D'Alembert 公式$u(x,t)=\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha$，这里

$\varphi(x)=0,\psi(x)=\cos x$，得$u(x,t)=\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\cos\alpha d\alpha=\dfrac{\sin(x+at)-\sin(x-at)}{2a}$.

解的物理意义： $f(x-at)$表示右行波（或右传播波、正行波），$f(x+at)$表示左行波（或左传播波、逆行波），$u(x,t)$表示沿x轴正、负方向传播的行波.