

西北师范大学物理与电子工程学院

2005—2006 学年度第 2 学期《数学物理方法》课程期末考试试卷(A 卷)

系别: 物理系 专业: 物理学 级别: _____ 班级: _____

学号: _____ 姓名: _____ 任课教师: 洪学仁

题号	一	二	三	四	总分
分数					

请考生注意: 第一题答案填写在试卷上, 第二、三、四题写清楚试题编号, 解答过程写在答卷用纸上, 请尽量保持卷面整洁。

一、填空题 (每小题 2 分, 共 20 分)

- 二阶线性偏微分方程从数学上可以分为椭圆型、_____、_____三类.
- 典型的定解问题由_____和_____组成.
- 弦振动方程的形式为_____, 一维热传导方程的形式为_____.
- 定解问题满足条件: ①解存在、②_____、③_____, 则称该定解问题是适定的.
- 对任意定义在 $(-\infty, \infty)$ 上的连续函数 $\varphi(x)$, 有 $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\delta(x)dx =$ _____.
- 本征值问题 $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0, X(l) = 0 \end{cases}$ 的本征值是_____, 本征函数是_____.

7. 弦的自由横振动方程的混合问题
$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & (0 < x < l, t > 0) \\ u(0, t) = \mu_1(t), u(l, t) = \mu_2(t) & (t \geq 0) \\ u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x) & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$
 的边界

条件是非齐次的, 若选取函数 $U(x, t) =$ _____ ,

使 $v(x, t) = u(x, t) - U(x, t)$, 则可使边界条件齐次化.

8. 已知定解问题
$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t) & (0 < x < l, t > 0) \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = 0 & (t \geq 0) \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0 & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$
, 对应的格林函数 $G(x, t; \xi, \tau)$

满足的定解问题为_____.

9. Legendre 多项式的_____性、_____性和完备性是使它成为一个坐标函数系的三个重要性质.

10. 方程 $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 12y = 0$ 称为_____阶 Legendre 微分方程, 球函数是指_____方程的解.

二、(5 分) Laplace 方程在球坐标系下的形式为

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \right] = 0.$$

试求出 Laplace 方程的球对称解(提示: u 与 θ, φ 无关).

三、写出定解问题 (每小题 10 分, 共 20 分)

说明: 只写出相应定解问题, 不求解.

1. 今有一弦, 其两端被钉子钉紧, 作自由振动, 它的初位移为

$$\varphi(x) = \begin{cases} hx & (0 \leq x \leq 1) \\ h(2-x) & (1 \leq x \leq 2) \end{cases} \quad (\text{其中 } h \text{ 为已知常数}), \text{ 初速度为 } 0. \text{ 请写出此弦振动满足}$$

的定解问题.

2. 一根长为 l 的具有初常温 u_0 的均匀细杆, 已知它的一端保持温度为零, 另一端绝热. 请写出此细杆上温度分布满足的定解问题.

四、求解定解问题 (共 55 分)

1. (25 分) 用分离变量法求解热传导方程的混合问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & (0 < x < l, t > 0) \\ u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 & (t \geq 0), \\ u(x, 0) = \sin \frac{2\pi x}{l} & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

要求写出完整过程.

2. (15 分) 用 **Fourier 级数法** 求解外力作用下的弦振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = A \cos \frac{\pi x}{l} \sin \omega t & (0 < x < l, t > 0) \\ u_x(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0 & (t \geq 0) \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0 & (0 \leq x \leq l) \end{cases}.$$

已知非齐次常微分方程初值问题
$$\begin{cases} T_n''(t) + \frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} T_n(t) = f_n(t) \\ T_n(0) = A_n, T_n'(0) = B_n \end{cases}$$

的解为:
$$T_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + B_n \frac{l}{n\pi a} \sin \frac{n\pi a}{l} t + \frac{l}{n\pi a} \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{n\pi a(t-\tau)}{l} d\tau.$$

3. (15 分) 求解无限长弦的自由横振动并说明解的物理意义. 设弦的初始位移为 $A \sin \omega x$, 初始速度为 0.

参考答案

一、填空题 (每小题 2 分, 共 20 分)

1. 双曲型、抛物型.
2. 泛定方程, 定解条件.
3. $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), \quad u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t).$
4. 解唯一、解稳定.
5. $\varphi(0).$
6. $\lambda = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}, n = 1, 2, 3, \dots, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}, n = 1, 2, 3, \dots.$
7. $\mu_1(t) + \frac{x}{l}(\mu_2(t) - \mu_1(t)).$
8.
$$\begin{cases} G_{tt} - a^2 G_{xx} = 0 & (0 < x < l, t > 0) \\ G(0, t) = 0, G(l, t) = 0 & (t \geq 0) \\ G(x, \tau) = 0, G_t(x, \tau) = \delta(x - \xi) & (0 \leq x \leq l) \end{cases}.$$
9. 正交、归一.
10. 3.

二、(共 5 分)

解: 在球坐标系下, 如果 u 与 θ, φ 无关, 即得球对称解满足的方程为 $\frac{d}{dr}(r^2 \frac{du}{dr}) = 0,$

积分两次可得球对称解: $u(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2 (r \neq 0), C_1, C_2$ 为积分常数, 令 $C_1 = -1, C_2 = 0,$

可得 $u(r) = \frac{1}{r} (r \neq 0).$

三、写出定解问题 (每小题 10 分, 共 20 分)

1. **解:** 该定解问题为
$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & (0 < x < 2, t > 0) \\ u(0, t) = 0, u(2, t) = 0 & (t \geq 0) \\ u(x, 0) = \begin{cases} hx & (0 \leq x \leq 1) \\ h(2-x) & (1 \leq x \leq 2) \end{cases} \\ u_t(x, 0) = 0 & (0 \leq x < 2) \end{cases}.$$
2. **解:** 该定解问题为
$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 & (0 < x < l, t > 0) \\ u(0, t) = 0, u_x(l, t) = 0 & (t \geq 0) \\ u(x, 0) = u_0 & (0 \leq x \leq l) \end{cases}.$$

四、求解定解问题 (共 55 分)

1. (25 分)

解: (1) 变量分离

设 $u(x, t) = T(t)X(x)$, 代入泛定方程得 $\begin{cases} T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0 \end{cases}$, 其中 λ 为分离常数. 将

$u(x, t) = T(t)X(x)$ 代入边界条件得 $X(0) = X(l) = 0$.

(2) 求解特征值问题 $\begin{cases} X''(x) + \lambda(x) = 0 \\ X(0) = 0, X(l) = 0 \end{cases}$

特征值 $\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$, 特征函数 $X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$, $n = 1, 2, \dots$

(3) 求解常微分方程 $T'(t) + \lambda_n a^2 T(t) = 0$

$T_n(t) = C_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} t}$, 其中 C_n 为任意常数. 得一系列特解

$u_n(x, t) = T_n(t)X_n(x) = C_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} t} \sin \frac{n\pi x}{l}$, $n = 1, 2, \dots$

(4) 特解的叠加

$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} t} \sin \frac{n\pi x}{l}$

(5) 利用初始条件确定叠加系数

$u(x, 0) = \sin \frac{2\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{l} \Rightarrow C_2 = 1, C_n = 0 (n \neq 2)$

或 $C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \sin \frac{2\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx \Rightarrow C_2 = 1, C_n = 0 (n \neq 2)$

该定解问题的解为 $u(x, t) = e^{-\frac{4\pi^2 a^2}{l^2} t} \sin \frac{2\pi x}{l}$.

2. (15 分)

解: 用 Fourier 级数法求解.

级数展开的基本函数应是相应的齐次泛定方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ 在所给边界条件

$u_x(0, t) = 0, u_x(l, t) = 0$ 下的本征函数 $\cos \frac{n\pi x}{l} (n = 0, 1, 2, \dots)$.

(1) 设 $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cos \frac{n\pi x}{l}$,

A. 代入泛定方程, 有 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(T_n'' + \frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} T_n \right) \cos \frac{n\pi x}{l} = A \cos \frac{\pi x}{l} \sin \omega t$, 比较方程两边

的系数, 分离出 $T_n(t)$ 的常微分方程: $T_1'' + \frac{\pi^2 a^2}{l^2} T_1 = A \sin \omega t$, $T_n'' + \frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} T_n = 0 (n \neq 1)$.

B. 代入初始条件, 有

$$u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(0) \cos \frac{n\pi x}{l} = 0, \quad u_t(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n'(0) \cos \frac{n\pi x}{l} = 0.$$

可得, $T_n(0) = 0$, $T_n'(0) = 0$.

$$\text{因此, 有 } \begin{cases} T_1'' + \frac{\pi^2 a^2}{l^2} T_1 = A \sin \omega t \\ T_1(0) = 0, T_1'(0) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} T_n'' + \frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} T_n = 0 \\ T_n(0) = 0, T_n'(0) = 0 \end{cases} (n \neq 1).$$

$$(2) \text{ 求解 } \begin{cases} T_1'' + \frac{\pi^2 a^2}{l^2} T_1 = A \sin \omega t \\ T_1(0) = 0, T_1'(0) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} T_n'' + \frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} T_n = 0 \\ T_n(0) = 0, T_n'(0) = 0 \end{cases} (n \neq 1)$$

$$\text{A. 求解 } \begin{cases} T_1'' + \frac{\pi^2 a^2}{l^2} T_1 = A \sin \omega t \\ T_1(0) = 0, T_1'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\text{代公式, 可得 } T_1(t) = \frac{Al}{\pi a} \int_0^t \sin \omega \tau \sin \frac{\pi a(t-\tau)}{l} d\tau.$$

$$\text{B. 求解 } \begin{cases} T_n'' + \frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} T_n = 0 \\ T_n(0) = 0, T_n'(0) = 0 \end{cases} (n \neq 1)$$

$n = 0$ 时, $T_0(t) = C_0 + D_0 t$, 由 $T_0(0) = 0, T_0'(0) = 0$ 得 $C_0 = 0, D_0 = 0 \Rightarrow T_0(t) \equiv 0$.

$n \neq 0, 1$ 时, $T_n(t) = C_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + D_n \sin \frac{n\pi a}{l} t$, 由 $T_n(0) = 0, T_n'(0) = 0$

得 $C_n = 0, D_n = 0 \Rightarrow T_n(t) \equiv 0 (n = 2, 3, \dots)$.

$$(3) \text{ 该定解问题的解为 } u(x, t) = T_1(t) \cos \frac{\pi x}{l} = \frac{Al}{\pi a} \cos \frac{\pi x}{l} \int_0^t \sin \omega \tau \sin \frac{\pi a(t-\tau)}{l} d\tau.$$

3. (15 分)

解: 此无限长弦的自由横振动满足的定解问题为:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (-\infty < x < \infty, t > 0) \\ u(x, 0) = A \sin \omega x & (-\infty < x < \infty) \\ u_t(x, 0) = 0 & (-\infty < x < \infty) \end{cases}$$

利用 D'Alembert 公式 $u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha$, 这里

$$\varphi(x) = A \sin \omega x, \psi(x) = 0, \text{ 得 } u(x, t) = \frac{A \sin \omega(x+at) + A \sin \omega(x-at)}{2}$$

解的物理意义: $f(x-at)$ 表示右行波 (或右传播波、正行波), $f(x+at)$ 表示左行波 (或左传播波、逆行波), $u(x, t)$ 表示沿 x 轴正、负方向传播的行波.