

西北师范大学物理与电子工程学院
函授教育 2007 年暑期数学物理方法课程考试试卷(B)

班级: _____ 学号: _____

姓名: _____ 任课教师: _____

题号	一	二	三	总分
分数				

请考生注意: 以下各题需写出主要解答步骤, 请保持卷面整洁。

一、复变函数部分(共 30 分)

1. (7 分) 已知复数 $z = 1 + i\sqrt{3}$, 请求出复数 z 的实部 u 、虚部 v 、模 $|z|$ 、主幅角 $\arg z$, 并用三角形式、指数形式、几何形式(复平面)分别表示复数 z 。

2. (5 分) 证明复平面上的直线方程可以写成 $a\bar{z} + \bar{a}z = c$ ($a \neq 0$ 是复常数, c 是实常数)。

提示: 直线方程为 $ax + by = c$, 其中 a, b, c 为实数且 $a \cdot b \neq 0$ 。

3. (8 分) 判别 $f(z) = x^2 - iy$ 的可导性与解析性。

4. (5 分) 试求 $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ 的孤立奇点, 并指出它的类型。

5. (5 分) 利用留数定理计算回路积分 $\oint_{|z|=2} \frac{z}{\frac{1}{2} - \sin^2 z} dz$ 。

二、数学物理方程部分(共 55 分)

1. (10 分) 求解本征值问题
$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0 \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \end{cases}$$
。

2. (5 分) 今有偏微分方程 $u_{tt} = a^2 u_{xx} + bu_x$, 其中 b 为已知常数. 作代换 $u(x, t) = e^{\beta x} v(x, t)$, 问 β 取何值时可消去方程中的一阶导数项。

3. (25 分) 分离变量法是求解定解问题的重要方法之一. 请问分离变量法对定解问题有什么要求? 分离变量法有哪些基本步骤? 关键的步骤是什么? 请用分离变量法求解如下弦振动方程的混合问题(要求写出完整的求解过程), 并分析解的物理意义.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (0 < x < l, t > 0) \\ u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 & (t \geq 0) \\ u(x, 0) = \frac{\sin \pi x}{l}, \quad u_t(x, 0) = \frac{\sin 3\pi x}{l} & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

4. (15 分) 一根无限长的均匀细杆, 其振动满足如下定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} - 2\varepsilon u_t - \varepsilon^2 u & (-\infty < x < \infty, t > 0) \\ u(x, 0) = \varphi(x) & (-\infty < x < \infty) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) & (-\infty < x < \infty) \end{cases}$$

其中 $\varphi(x), \psi(x)$ 为充分光滑的已知函数. 请用行波法(达朗贝尔解法)求解该定解问题, 并说明解的物理意义(提示: 令 $v(x, t) = e^{\varepsilon t} u(x, t)$).

三、特殊函数部分(共 15 分)

1. (7 分) 连带勒让德函数的微分表达式为 $P_l^m(x) = \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^l l!} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l$, 试求 $P_2^1(x)$.

2. (8 分) l 阶球函数为 $Y_l^m(\theta, \varphi) = P_l^m(\cos \theta) \begin{cases} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{cases} \begin{pmatrix} m=0,1,2,\dots,l \\ l=0,1,2,3,\dots \end{pmatrix}$, 记号 $\begin{cases} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{cases}$ 表示或取 $\sin m\varphi$ 或取 $\cos m\varphi$. 已知 $P_1^1(\cos \theta) = \sin \theta$, $P_2^1(\cos \theta) = \frac{3}{2} \sin 2\theta$, $P_2^2(\cos \theta) = \frac{3}{2} (1 - \cos 2\theta)$, 请把函数 $\sin^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi$ 用球函数展开.

参考答案

一、复变函数部分(共 30 分)

1. (7 分) $u=1, v=\sqrt{3}, |z|=2, \arg z=\frac{\pi}{6}$, 三角形式 $z=2(\cos\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6})$, 指数形式

$z=2e^{i\frac{\pi}{6}}$, 复平面表示略.

2. (5 分) 证明: 因为实数形式的直线方程为 $ax+by=c$, 其中 a, b, c 为实数且 $a \cdot b \neq 0$.

在复平面上: $x=\frac{(z+\bar{z})}{2}, y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$, 代入直线方程 $ax+by=c$ 得

$$\frac{a(z+\bar{z})}{2} + \frac{b(z-\bar{z})}{2i} = c \Rightarrow \frac{a(z+\bar{z})}{2} - \frac{b(z-\bar{z})i}{2} = c \Rightarrow \frac{(a-bi)z}{2} + \frac{(a+bi)\bar{z}}{2} = c$$

令 $a=\frac{(a+bi)}{2}, \bar{a}=\frac{(a-bi)}{2}$ 即得复平面上的直线方程为

$\bar{a}z + a\bar{z} = c$ ($a \neq 0$ 是复常数, c 是实常数).

3. (8 分) $u=x^2, v=-y, \frac{\partial u}{\partial x}=2x, \frac{\partial u}{\partial y}=0, \frac{\partial v}{\partial x}=0, \frac{\partial v}{\partial y}=-1$, u, v 又连续偏导数, 然而, 仅

当 $x=-\frac{1}{2}$ 时, $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ 才成立. 根据解析函数的判别定理, 此函数在任何点

不解析, 仅在直线 $x=-\frac{1}{2}$ 上可导, 但不解析.

4. (5 分) $z=0$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 但 $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$, 或

$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots (0 < |z| < \infty)$, 所以 $z=0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点.

5. (5 分) $f(z) = \frac{z}{\frac{1}{2} - \sin^2 z} = \frac{2z}{\cos 2z}$ 在 $|z|=2$ 内有两个一阶极点 $z = \pm \frac{\pi}{4}$, 且

$$\operatorname{Res}_{z=\frac{\pi}{4}} \frac{2z}{\cos 2z} = \frac{2z}{(\cos 2z)'} \bigg|_{z=\frac{\pi}{4}} = -\frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{Res}_{z=-\frac{\pi}{4}} \frac{2z}{\cos 2z} = \frac{2z}{(\cos 2z)'} \bigg|_{z=-\frac{\pi}{4}} = -\frac{\pi}{4}$$

由留数定理得 $\oint_{|z|=2} \frac{z}{\frac{1}{2} - \cos z} dz = 2\pi i \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = -\pi^2 i$.

二、数学物理方程部分(共 55 分)

1. (10分)

本征值为 $\lambda = m^2, m = 0, 1, 2, 3, \dots$, 本征函数为 $\Phi_m(\varphi) = a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi$, 其中 a_m, b_m 为任意常数, 不能同时为 0.

2. (5 分)

$$\beta = -\frac{b}{2a^2}.$$

3. (25 分)

分离变量法要求定解问题的泛定方程与边界条件必须是齐次的. 分离变量法其基本步骤为: 1、变量分离; 2、求解本征值问题; 3、求解另外的常微分方程; 4、特解的叠加; 5、利用定解条件确定叠加系数. 分离变量法关键的步骤是求解本征值问题.

(1). 变量分离

设 $u(x, t) = T(t)X(x)$, 代入泛定方程得 $\begin{cases} T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0 \end{cases}$, 其中 λ 为分离常数.

将 $u(x, t) = T(t)X(x)$ 代入边界条件得 $X(0) = X(l) = 0$.

(2). 求解特征值问题 $\begin{cases} X''(x) + \lambda(x) = 0 \\ X(0) = 0, X(l) = 0 \end{cases}$

特征值 $\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$, 特征函数 $X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$, $n = 1, 2, \dots$

(3). 求解常微分方程 $T''(t) + \lambda_n a^2 T(t) = 0$

$T_n(t) = C_n \cos \frac{n\pi a t}{l} + D_n \sin \frac{n\pi a t}{l}$, 其中 C_n, D_n 为任意常数. 得一系列特解

$u_n(x, t) = T_n(t)X_n(x) = (C_n \cos \frac{n\pi a t}{l} + D_n \sin \frac{n\pi a t}{l}) \sin \frac{n\pi x}{l}$, $n = 1, 2, \dots$

(4). 特解的叠加

$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos \frac{n\pi a t}{l} + D_n \sin \frac{n\pi a t}{l}) \sin \frac{n\pi x}{l}$

(5). 利用初始条件确定叠加系数

$u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{l} \Rightarrow C_1 = 1, C_n = 0 (n \neq 1)$

$$u_t(x, 0) = \sin \frac{3\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{l} D_n \sin \frac{n\pi x}{l} \Rightarrow D_3 = \frac{l}{3\pi a}, D_n = 0 (n \neq 3)$$

$$\text{该混合问题的解为 } u(x, t) = \cos \frac{\pi at}{l} \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{l}{3\pi a} \sin \frac{3\pi at}{l} \sin \frac{3\pi x}{l}.$$

解的物理意义：该 Fourier 级数解在物理上表示驻波。

4、(15 分)

令 $v(x, t) = e^{\varepsilon t} u(x, t)$ 。化原定解问题为：

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} & (-\infty < x < \infty, t > 0) \\ u(x, 0) = \varphi(x) & (-\infty < x < \infty) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) + \varepsilon \varphi(x) & (-\infty < x < \infty) \end{cases}$$

利用 D'Alembert 公式，有

$$v(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} [\psi(\alpha) + \varepsilon \varphi(\alpha)] d\alpha, \text{ 所以,}$$

$$u(x, t) = e^{-\varepsilon t} v(x, t) = e^{-\varepsilon t} \left[\frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} [\psi(\alpha) + \varepsilon \varphi(\alpha)] d\alpha \right]$$

解的物理意义：表示 $f(x-at)$ 右行波(或右传播波、正行波), $f(x+at)$ 表示左行波(或左传播波、逆行波), $u(x, t)$ 表示沿 x 轴正、负方向传播的行波, 其中前一项来源于初始位移 $\varphi(x)$, 后一项来源于初始位移 $\varphi(x)$ 和初始速度 $\psi(x)$ 。

三、特殊函数部分(共 15 分)

$$1、(7 \text{ 分}) \quad P_2^1(x) = 3(1-x^2)^{1/2} x = \frac{3}{2} \sin 2\theta.$$

2、(8 分)

$$\sin^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) \cdot \frac{1}{2} \sin 2\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} P_2^2(\cos \theta) \cdot \frac{1}{2} \sin 2\varphi = \frac{1}{6} P_2^2(\cos \theta) \sin 2\varphi$$